r を正の実数とし，関数

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

を考える．

(1) $r=1$ のとき，$f(x)$ はつねに増加することを示せ．

(2) 次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ．

条件：$0<r<c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する．

(22 千葉大 9)

【答】

(1) 略

(2) $c=\sqrt{6\sqrt{3}}$

【解答】

$$f(x) = x + \frac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

(1) $r=1$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \\ f'(x) &= 1 - \frac{1}{2}(1+\sin^2 x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\sin x\cos x \\ &= \frac{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}} - \sin 2x}{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

であり，すべて x に対して $2 \leqq 2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}} \leqq 4\sqrt{2}$，$-1 \leqq \sin 2x \leqq 1$ であるから

$$f'(x) > 0$$

であり，$f(x)$ はつねに増加する． …… (証明終わり)

(2) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}} - r\sin 2x}{2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

であり，$f'(x)$ の符号は $2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}} - r\sin 2x$ の符号と一致するから

条件：$0<r<c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する

$\Longleftrightarrow$ $0<r<c$ のときはつねに $f'(x) \geqq 0$ である

$\Longleftrightarrow$ $0<r<c$ のときはつねに $2(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{2}} - r\sin 2x \geqq 0$ …… $(*)$ である

$(*)$ を満たす r の値の範囲を求める．

$$\begin{aligned} (*) \iff & 2\left(1+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \geqq r\sin 2x \\ \iff & 2\left(\frac{3-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \geqq r\sin 2x \end{aligned}$$

左辺はつねに正であるから，$\sin 2x \leqq 0$ のときこの不等式はつねに成り立つ．$\sin 2x > 0$ のときについて調べる．

$$(*) \iff r \leqq \frac{(3-\cos 2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\sin 2x}$$
$$\iff r^2 \leqq \frac{(3-\cos 2x)^3}{2\sin^2 2x} \quad (\because \text{ 辺々の値は正})$$

$t = \cos 2x$ とおくと

$$\frac{(3-\cos 2x)^3}{2\sin^2 2x} = \frac{(3-\cos 2x)^3}{2(1-\cos^2 2x)} = \frac{(3-t)^3}{2(1-t^2)}$$

である．$g(t) = \dfrac{(3-t)^3}{2(1-t^2)}$ $(-1 < t < 1)$ とおくと

$$g'(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3(3-t)^2(-1)\cdot(1-t^2)-(3-t)^3\cdot(-2t)}{(1-t^2)^2}$$
$$= \frac{(3-t)^2\{3(t^2-1)+2t(3-t)\}}{2(1-t^2)^2}$$
$$= \frac{(3-t)^2(t^2+6t-3)}{2(1-t^2)^2}$$

$-1 < t < 1$ における $g(t)$ の増減は下表となる．

t	(-1)	$\cdots$	$-3+2\sqrt{3}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$g(-3+2\sqrt{3}) = \frac{(6-2\sqrt{3})^3}{2\left\{1-(-3+2\sqrt{3})^2\right\}}$$
$$= \frac{(2\sqrt{3})^3(\sqrt{3}-1)^3}{2\{1-(21-12\sqrt{3})\}}$$
$$= \frac{24\sqrt{3}(3\sqrt{3}-3\cdot 3+3\sqrt{3}-1)}{2(-20+12\sqrt{3})}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}(6\sqrt{3}-10)}{3\sqrt{3}-5}$$
$$= 6\sqrt{3}$$

$0 < r < c$ のときはつねに不等式 $(*)$ が成り立つための条件は

$$r^2 \leqq 6\sqrt{3}$$

が成り立つことであり，$r > 0$ より

$$r \leqq \sqrt{6\sqrt{3}}$$

である．よって，条件を満たす最大の正の実数 c は

$$\boldsymbol{c = \sqrt{6\sqrt{3}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．