関数 $f(x)=\sqrt{1+\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最小値と最大値を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$\sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2}$ となることを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_0^1 \{f(x)\}^n dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ の値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$ を用いてよい．

(22 熊本大 理・工・医・薬 4)

【答】

(1) 最小値 1，最大値 $\sqrt{2}$

(2) 略

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}=\sqrt{2}$

【解答】

$$f(x)=\sqrt{1+\sin^2\frac{\pi x}{2}}$$

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$0 \leqq \dfrac{\pi x}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であり，$f(x)$ は単調増加である．

よって，$f(x)$ は

$x=0$ のとき　**最小値 1**，　……(答)

$x=1$ のとき　**最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$**　……(答)

をとる．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，(1) の結果から，$f(x) \leqq \sqrt{2}$ は証明済みである．

次に，$\sqrt{2}x \leqq f(x)$ を示す．$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\sqrt{2}x \geqq 0$，$f(x)>0$ であるから，$(\sqrt{2}x)^2 \leqq \{f(x)\}^2$ を示せばよい．

$$g(x)=\{f(x)\}^2-(\sqrt{2}x)^2=1+\sin^2\frac{\pi x}{2}-2x^2$$

とおく．$0<x<1$ のとき

$$g'(x)=2\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-4x=\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)-4x$$

$$g''(x)=\frac{\pi}{2}\cos(\pi x)\cdot\pi-4=\frac{\pi^2}{2}\cos(\pi x)-4=\frac{\pi^2}{2}\left\{\cos(\pi x)-\frac{8}{\pi^2}\right\}$$

$0<x<1$ のとき $0<\pi x<\pi$ であり，$\cos(\pi x)=\dfrac{8}{\pi^2}$ となる x はただ 1 つ存在する．それを α とおくと $g'(x)$ の増減は右の上表となる．

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(1)
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	(0)	↗		↘	(-4)

したがって，$g'(x)=0$ となる x はただ一つ存在する．それを β とおくと $g(x)$ の増減は右の下表となり，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $g(x) \geqq 0$ が成り立つ．すなわち

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗		↘	0

$$f(x) \geqq \sqrt{2}x$$

が成り立つ．

以上より

$$\sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2}$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

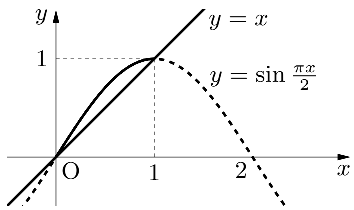
- $g(x) = 1 + \sin^2 \dfrac{\pi x}{2} - 2x^2 = (1 - x^2) + \sin^2 \dfrac{\pi x}{2} - x^2$

$$= (1 - x^2) + \left(\sin \frac{\pi x}{2} + x\right)\left(\sin \frac{\pi x}{2} - x\right)$$

と変形すると，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$1 - x^2 \geqq 0, \quad \sin \frac{\pi x}{2} + x \geqq 0$$

であり，右図より，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき



$$\sin \frac{\pi x}{2} \geqq x$$

$$\therefore \quad \sin \frac{\pi x}{2} - x \geqq 0$$

である．したがって

$$g(x) \geqq 0$$

である．

(3) (2) の結果から，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$0 \leqq \sqrt{2}x \leqq f(x) \leqq \sqrt{2}$$

が成り立ち

$$0 \leqq (\sqrt{2}x)^n \leqq \{f(x)\}^n \leqq (\sqrt{2})^n$$

$$\int_0^1 (\sqrt{2}x)^n \, dx \leqq a_n \leqq \int_0^1 (\sqrt{2})^n \, dx$$

である．ここで

$$\int_0^1 (\sqrt{2}x)^n \, dx = \left[\frac{(\sqrt{2})^n x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1},$$

$$\int_0^1 (\sqrt{2})^n \, dx = \Big[(\sqrt{2})^n x\Big]_0^1 = (\sqrt{2})^n$$

であるから

$$\frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} \leqq a_n \leqq (\sqrt{2})^n$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} \leqq \sqrt[n]{a_n} \leqq \sqrt{2}$$

となる．ここで

$$\lim_{n\to\infty} \log \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\log \sqrt{2} - \frac{\log(n+1)}{n}\right\} = \log \sqrt{2} \quad (\because \text{ ヒント})$$

$\log x$ は連続な関数であるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n+1}} = \sqrt{2}$$

となる．はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$ ……(答)

である．