数列 $\{a_n\}$ の一般項が

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

であるとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(22 札幌医大 1(2))

【答】 $2\log 2 - 1$

【解答】

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

のとき

$$\begin{aligned}\log a_n &= \frac{1}{n}\log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

なので，区分求積法を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1 \log(1+x)\,dx\\ &= \Big[(1+x)\cdot\log(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (1+x)\cdot\frac{1}{1+x}\,dx\\ &= 2\log 2 - \Big[x\Big]_0^1\\ &= \mathbf{2\log 2 - 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

- 次のように計算してもよい．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_1^2 \log x\,dx\\ &= \Big[x\log x\Big]_1^2 - \int_1^2 x\,dx\\ &= 2\log 2 - \Big[x\Big]_0^1\\ &= 2\log 2 - 1\end{aligned}$$

である．