極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2k+n^3}{k^4+2n^2k^2+n^4}$ を求めよ．

(22 電気通信大 後 5(1)(iii))

【答】 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{8}$

【解答】

区分求積法を用いる．

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2k+n^3}{k^4+2n^2k^2+n^4}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\dfrac{k}{n}+1}{\left(\dfrac{k}{n}\right)^4+2\left(\dfrac{k}{n}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{n}\\
&=\int_0^1\frac{x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx\\
&=\int_0^1\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx
\end{aligned}
$$

である．ここで，$x=\tan\theta$ とおくと

$$
dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
x & 0 & \longrightarrow & 1\\
\hline
t & 1 & \longrightarrow & \dfrac{\pi}{4}
\end{array}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\theta+1}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\theta+1}{\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan\theta+1)\cos^2\theta\,d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin 2\theta+\cos 2\theta+1)\,d\theta\\
&=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．