O を原点とする座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = e^{-t}\sin t,\ y = e^{-l}\cos t \quad (t \geqq 0)$$

で表される．以下の問いに答えよ．ただし，ベクトル $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ を記号 $\vec{v}$ を用いて

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$

と表し，この $\vec{v}$ を時刻 t における点 P の速度という．さらに 時刻 t における点 P の速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|$ を時刻 t における点 P の速さという．

(1) 時刻 $t=0$ における点 P の速度を求めよ．

(2) t_1 を $t_1 \geqq 0$ を満たす定数とする．時刻 $t=t_1$ における点 P の速さが，時刻 $t=0$ における点 P の速さの $\dfrac{1}{3}$ となる定数 t_1 を求めよ．

(3) 時刻 $t=0$ から時刻 $t=1$ までに点 P が動く道のり L を求めよ．

(4) t_2 を $t_2 \geqq 0$ を満たす定数とする．時刻 $t=t_2$ における点 P について，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とその点 P の速度のなす角 θ を求めよ．θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．

(22 豊橋技科大 3)

【答】

(1) $(1,\ -1)$

(2) $t_1 = \log 3$

(3) $L = \sqrt{2}(1-e^{-1})$

(4) $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$

【解答】

$$\begin{cases} x = e^{-t}\sin t \\ y = e^{-l}\cos t \end{cases} \quad (t \geqq 0)$$

(1) $x,\ y$ を微分すると

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (-e^{-t})\cdot\sin t + e^{-t}\cos t = -e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ \dfrac{dy}{dt} = (-e^{-t})\cos t + e^{-t}\cdot(-\sin t) = -e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

であるから，$t=0$ における点 P の速度 $\overrightarrow{v_{t=0}}$ は

$$\mathbf{(1,\ -1)} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 時刻 t における点 P の速さを $|\vec{v_t}|$ とおくと

$$\begin{aligned} |\vec{v_t}| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{e^{-2t}(\sin t - \cos t)^2 + e^{-2t}(\sin t + \cos t)^2} \quad (\because ①) \\ &= \sqrt{e^{-2t}(2\sin^2 t + 2\cos^2 t)} \\ &= \sqrt{2}e^{-t} \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

となる．$|\overrightarrow{v_{t=t_1}}| = \dfrac{1}{3}|\overrightarrow{v_{t=0}}|$ となる t_1 は

$$\sqrt{2}e^{-t_1} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2} \qquad \therefore \quad -t_1 = \log\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{t_1 = \log 3} \quad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $t=0$ から $t=1$ までに点 P が動く道のり L は

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^1 |\overrightarrow{v_t}|\,dt = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{2}e^{-t}\,dt \quad (\because \text{②}) \\
&= \sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\sqrt{2}(1-e^{-1})}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．

(4) 時刻 $t=t_2$ における点 P について

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(e^{-t_2}\sin t_2,\ e^{-t_2}\cos t_2\right)$$

$$\overrightarrow{v_{t=t_2}} = \left(-e^{-t_2}(\sin t_2 - \cos t_2),\ -e^{-t_2}(\sin t_2 + \cos t_2)\right) \quad (\because \text{①})$$

θ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と速度 $\overrightarrow{v_{t=t_2}}$ のなす角であるから

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{v_{t=t_2}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{v_{t=t_2}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{v_{t=t_2}}}{(e^{-t_2})(\sqrt{2}e^{-t_2})} \quad (\because \text{②}) \\
&= \frac{(\sin t_2,\ \cos t_2)\cdot(-(\sin t_2 - \cos t_2),\ -(\sin t_2 + \cos t_2))}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{-(\sin^2 t_2 - \sin t_2\cos t_2) - (\sin t_2\cos t_2 + \cos^2 t_2)}{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

である．θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{3}{4}\pi}$$

……(答)

である．