$x = \log t$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$ の値を求めよ．ただし log は自然対数，e は自然対数の底とする．

(22 九州歯大 歯 1(2))

【答】 $\log \dfrac{2e}{e+1}$

【解答】

$x = \log t$ とおくと

$$dx = \frac{dt}{t} \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline t & 1 & \longrightarrow & e \end{array}$$

である．$e^x = t$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx &= \int_1^e \frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{t} \\
&= \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\
&= \Big[\log|t| - \log|t+1|\Big]_1^e \\
&= \log e - \log(e+1) - \log 1 + \log 2 \\
&= 1 - \log(e+1) + \log 2 \\
&= \boldsymbol{\log \frac{2e}{e+1}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．