以下の問いに答えよ．

(1) 実数全体を定義域とする連続関数 $f(x)$ は，すべての x に対し，$f(x)>0$ をみたすとする．正の実数 t に対し，定積分

$$\int_{-t}^{t} \frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}\,dx$$

を求めよ．

(2) 定積分

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{-2\sin x}}\,dx$$

を求めよ．

(22 信州大 後 理 4)

【答】

(1) t

(2) π

【解答】

(1) $I=\displaystyle\int_{-t}^{t} \frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}\,dx$ とし，$x=-u$ とおくと

$$dx=-du \qquad \begin{array}{c|ccc} x & -t & \longrightarrow & t \\ \hline u & t & \longrightarrow & -t \end{array}$$

であるから

$$I=\int_{t}^{-t} \frac{f(-u)}{f(-u)+f(u)}(-1)\,du=\int_{-t}^{t} \frac{f(-u)}{f(u)+f(-u)}\,du$$

$$\therefore\quad I=\int_{-t}^{t} \frac{f(-x)}{f(x)+f(-x)}\,dx$$

となるので

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{-t}^{t} \frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}\,dx+\int_{-t}^{t} \frac{f(-x)}{f(x)+f(-x)}\,dx \\ &= \int_{-t}^{t} \frac{f(x)+f(-x)}{f(x)+f(-x)}\,dx=\Big[x\Big]_{-t}^{t} \\ &= 2t \end{aligned}$$

$$\therefore\quad I=t$$

よって

$$\int_{-t}^{t} \frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}\,dx=\boldsymbol{t} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{-2\sin x}}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\sin(-x)}}\,dx$$

であり，$e^{\sin x}$ は実数全体を定義域とする連続関数で，すべての x に対し $e^{\sin x}>0$ を満たす．$t=\pi$，$f(x)=e^{\sin x}$ とおけば，(1) の結果より

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{-2\sin x}}\,dx=\boldsymbol{\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．