

次の定積分を求めなさい。

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\{\log(x^3) + 1\} \log x}$$

ただし, $\log x$ は自然対数とする.

(22 信州大 教育 4)

【答】 $\log \frac{8}{7}$

【解答】

$t = \log x$ とおくと

$$dt = \frac{1}{x} dx \quad \begin{array}{l|l} x & e \rightarrow e^2 \\ t & 1 \rightarrow 2 \end{array}$$

であるから, 求める定積分を I とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int_e^{e^2} \frac{1}{(3 \log x + 1) \log x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{(3t + 1)t} dt \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{3t + 1} \right) dt \\ &= \left[\log |t| - \log |3t + 1| \right]_1^2 \\ &= \log 2 - (\log 7 - \log 4) \\ &= \log \frac{8}{7} \end{aligned}$$

である.