4 つの関数

$$① \ f(x)=x^2 \quad ② \ f(x)=1-x \quad ③ \ f(x)=e^x \quad ④ \ f(x)=\sin 2\pi x$$

を考える．それぞれの関数と正の整数 n について，2 つの数列を $a_n=\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$，$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$ とするとき，任意の n について $a_n<b_n$ を満たす関数をすべて選びなさい．解答欄には①～④の番号で答えなさい．

(22 公立千歳科技大 中期 理工 1(8))

【答】 ①，③

【解答】

① $f(x)=x^2$ のとき

$$a_n=\int_0^n x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^n=\frac{n^3}{3},$$
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

であり，任意の正の整数 n について $\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}>0$ であるから，$a_n<b_n$ が成り立つ．

② $f(x)=1-x$ のとき

$$a_n=\int_0^n (1-x)\,dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^n=n-\frac{n^2}{2},$$
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-k)=\frac{n(1-n)}{2}=\frac{n}{2}-\frac{n^2}{2}$$

であり，任意の正の整数 n について $n>\dfrac{n}{2}$ であるから，$a_n>b_n$ が成り立つ．

③ $f(x)=e^x$ のとき

$$a_n=\int_0^n e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^n=e^n-1,$$
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}e^x=e+e^2+\cdots+e^n$$

であり，任意の正の整数 n について $-1<e+e^2+\cdots+e^{n-1}$ であるから，$a_n<b_n$ が成り立つ．

④ $f(x)=\sin 2\pi x$ のとき

$$a_n=\int_0^n \sin 2\pi x\,dx=\left[-\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right]_0^n=-\frac{1-1}{2\pi}=0,$$
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\pi=\sum_{k=1}^{n}0=0$$

であり，任意の正の整数 n について $a_n=b_n$ が成り立つ．

以上より，任意の正の整数 n について $a_n<b_n$ を満たす関数は

①，③ ……(答)

である．

- $0\leqq x\leqq n$ において，①，③ は増加関数である．一般化して

  $0\leqq x\leqq n$ において，$f(x)$ が増加関数ならば，$a_n<b_n$ が成り立つ

ことを示す．

$$a_n = \int_0^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

$0 \leqq k-1 < k \leqq n$ のとき，$f(x)$ は増加関数であるから

$$f(k-1) \leqq f(x) \leqq f(k)$$

左の等号は $x = k-1$ のとき，右の等号は $x = k$ のとき成り立つ．したがって

$$\int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx < \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx < \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx$$

$$\therefore\quad f(k-1) < \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx < f(k)$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n} f(k-1) < \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$\therefore\quad b_0 + b_{n-1} < a_n < b_n$$

よって，$f(x)$ が増加関数ならば，$a_n < b_n$ が成り立つ．