$f(x)$ は微分可能な関数とする．

(3) 次の等式を示せ．ただし，$C$ は積分定数とする．

$$\int e^x(f(x)+f'(x))\,dx = e^x f(x) + C$$

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{1+\cos 2x}\,dx$ を計算せよ．

(22 大阪教大 3(3)(4))

---

【答】

(3) 略

(4) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}-1\right)$

---

【解答】

(3) 右辺を $x$ で微分すると

$$\begin{aligned}(e^x f(x))' &= (e^x)'f(x) + e^x f'(x)\\ &= e^x(f(x)+f'(x))\end{aligned}$$

であるから

$$\int e^x(f(x)+f'(x))dx = e^x f(x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(4) 2 倍角の公式，半角の公式を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{1+\cos 2x} &= \frac{\sqrt{1+2\sin x\cos x}}{2\cos^2 x}\\ &= \frac{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}}{2\cos^2 x}\\ &= \frac{|\sin x+\cos x|}{2\cos^2 x}\end{aligned}$$

である．積分区間が $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき $\sin x+\cos x>0$ であるから

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{1+\cos 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$$

となる．$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ より (3) の等式を用いることができる．

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{1+\cos 2x}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x(f(x)+f'(x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}\Big[e^x f(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{1}{2}\left[e^x\cdot\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}-1\right)}\end{aligned}$$

……(答)

である．