

定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x \, dx$ を求めよ.

(22 学習院大 理・文 3(2))

【答】 $\frac{3}{2} - \log 2$

【解答】

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \tan x (\tan x)' + \frac{(\cos x)'}{\cos x} \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \tan^2 x + \log |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{3})^2 + \log \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \log 2 \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.