定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$ の値は, $\boxed{\text{お}}$ である.

(22 宮崎大 工 1(5))

【答】

お
$\dfrac{2\pi - 3\sqrt{3}}{192}$

【解答】

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$$

被積分関数の次数下げを考えて式を変形すると

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\sin^2 2x \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin^2 x \cos^2 x\,dx &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1-\cos 4x)\,dx \\
&= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{12}} \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{192}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である.