

定積分 $\int_0^{2 \log_e 2} x|e^x - 2| dx$ を求めよ.

(22 富山県大 工 1(3))

【答】 $4 \log_e 2 - 2(\log_e 2)^2 - 1$

【解答】

$e^x - 2$ は $x = \log_e 2$ で符号が負から正に変わるので

$$\int_0^{2 \log_e 2} x|e^x - 2| dx = - \int_0^{\log_e 2} x(e^x - 2) dx + \int_{\log_e 2}^{2 \log_e 2} x(e^x - 2) dx$$

として絶対値をはずすことができる. 部分積分法により

$$\begin{aligned} \int x(e^x - 2) dx &= x(e^x - 2x) - \int 1 \cdot (e^x - 2x) dx \\ &= x(e^x - 2x) - (e^x - x^2) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\ &= (x-1)e^x - x^2 + C \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{2 \log_e 2} x|e^x - 2| dx &= - \left[(x-1)e^x - x^2 \right]_0^{\log_e 2} + \left[(x-1)e^x - x^2 \right]_{\log_e 2}^{2 \log_e 2} \\ &= -2 \{(\log_e 2 - 1) \cdot 2 - (\log_e 2)^2 \} - e^0 + \{ (2 \log_e 2 - 1) \cdot 4 - (2 \log_e 2)^2 \} \\ &= -4(\log_e 2 - 1) + 2(\log_e 2)^2 - 1 + 4(2 \log_e 2 - 1) - 4(\log_e 2)^2 \\ &= 4 \log_e 2 - 2(\log_e 2)^2 - 1 \end{aligned} \quad \dots\dots\text{(答)}$$

である.