

定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{\sin^2 x + 1} \sin 2x \, dx$ を求めよ.

(22 山梨大 工 1(3))

【答】 $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$

【解答】

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{\sin^2 x + 1} \sin 2x \, dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\sin^2 x + 1 = t$ とおくと

$$2 \sin x \cos x \, dx = dt \quad \therefore \quad \sin 2x \, dx = dt \quad \begin{array}{l|l} x & \frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{3}{4}\pi \\ t & 2 \longrightarrow \frac{3}{2} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_2^{\frac{3}{2}} \sqrt{t} \, dt = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_2^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.