以下の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}=\frac{a}{x^2+1}+\frac{b}{x^2+3}$$

が x についての恒等式となるように，定数 a, b の値を定めよ．

(2) 定積分 $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ の値を求めよ．

(3) 定積分 $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}$ の値を求めよ．

(22 工学院大 工・情報・先進工・建築 4)

【答】

(1) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{2}$

(2) $I=\dfrac{\pi}{4}$

(3) $J=\dfrac{9-2\sqrt{3}}{72}\pi$

【解答】

(1) 右辺は

$$\frac{a}{x^2+1}+\frac{b}{x^2+3}=\frac{(a+b)x^2+3a+b}{(x^2+1)(x^2+3)}$$

であり，与えられた等式が x についての恒等式となる条件は，辺々の分子を比較して

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a=\frac{1}{2},\quad b=-\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2)
$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$$

$x=\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

であり

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (1)，(2) を用いると

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{1}{x^2+3}\,dx\right)$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\,dx$ の値を求める．$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & 1 & \longrightarrow & \frac{\pi}{6} \end{array}$$

であるから

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

　よって

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi\right) = \boldsymbol{\frac{9-2\sqrt{3}}{72}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.