次の定積分を求めよ．

$$\int_2^3 \frac{x-2}{x^2-x}\,dx$$

(22 広島市大 情報科学 1(3)(i))

【答】 $\log\dfrac{9}{8}$

【解答】

被積分関数を部分分数分解する．定数 $a,\ b$ を用いて

$$\frac{x-2}{x^2-x}=\frac{x-2}{x(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}$$

と表すことができる．両辺の分子を比較すると

$$\begin{aligned} &x-2=a(x-1)+bx \\ \therefore\quad &x-2=(a+b)x-a \end{aligned}$$

であり

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a=-2 \end{cases} \qquad \therefore\quad a=2,\ b=-1$$

を得る．よって

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x-2}{x^2-x}\,dx &= \int_2^3 \left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= \Big[2\log|x|-\log|x-1|\Big]_2^3 \\ &= 2(\log 3-\log 2)-\log 2 \\ &= 2\log 3-3\log 2 \\ &= \boldsymbol{\log\frac{9}{8}} \end{aligned}$$

……(答)

である．

- 次のように部分分数分解してもよい．

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x^2-x} &= \frac{(x-1)-1}{(x-1)x} \\ &= \frac{1}{x}-\frac{1}{(x-1)x} \\ &= \frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{2}{x}-\frac{1}{x-1} \end{aligned}$$