$I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は正の整数とする．

(i) I_1 を求めよ．

(ii) I_n と I_{n+2} との間に成り立つ関係を求めよ．

(iii) I_5 を求めよ．

(22 昭和大 医 3(2))

【答】

(i) $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$

(ii) $I_{n+2} = \dfrac{n+2}{n+3} I_n$

(iii) $I_5 = \dfrac{5}{32}\pi$

【解答】

(i) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ は半径 1 の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ に等しいので

$$I_1 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- $x = \sin\theta$ とおき，置換積分してもよい．

$$dx = \cos\theta\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} \cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である．

(ii) 部分積分法により

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}\,dx \\ &= \left[x\cdot(1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{n+2}{2}(1-x^2)^{\frac{n}{2}}(-2x)\,dx \\ &= (n+2)\int_0^1 x^2(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx \\ &= (n+2)\int_0^1 \{1-(1-x^2)\}(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx \\ &= (n+2)\int_0^1 \{(1-x^2)^{\frac{n}{2}} - (1-x^2)^{\frac{n+2}{2}}\}\,dx \\ &= (n+2)I_n - (n+2)I_{n+2} \end{aligned}$$

であるから

$$(n+3)I_{n+2} = (n+2)I_n$$

$$\therefore\ \boldsymbol{I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} I_n} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つ．

- $x = \sin\theta$ とおくと

$$dx = \cos\theta\, d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

であるから

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^{\frac{n}{2}} \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta\, d\theta$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+3}\theta\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}\theta (\sin\theta)'\, d\theta \\ &= \Big[\cos^{n+2}\theta\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta(-\sin\theta)\cdot\sin\theta\, d\theta \\ &= (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta \\ &= (n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n+1}\theta - \cos^{n+3}\theta)\, d\theta \\ &= (n+2)I_n - (n+2)I_{n+2} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &(n+3)I_{n+2} = (n+2)I_n \\ \therefore\quad &I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} I_n \end{aligned}$$

(iii) ① と (i) の結果より

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{5}{6} I_3 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4} I_1 \\ &= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{32}\pi} \end{aligned}$$

……(答)

である．