C を積分定数として，指数関数と単項式の積の不定積分について，次式が成り立つ．

$$\int xe^{-3x}\,dx = -\left(\frac{\boxed{\text{ア}}\,x + \boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\right)e^{-3x} + C$$

$$\int x^2e^{-3x}\,dx = -\left(\frac{\boxed{\text{エ}}\,x^2 + \boxed{\text{オ}}\,x + \boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\right)e^{-3x} + C$$

また，定積分について，

$$\int_0^1 |(9x^2-1)e^{-3x}|\,dx = \frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\left(-1 + \boxed{\text{コ}}\,e^{\boxed{\text{サシ}}} - \boxed{\text{スセ}}\,e^{-3}\right)$$

が成り立つ．

(22 杏林大 医 2(1))

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キク	ケ	コ	サシ	スセ
3	1	9	9	6	2	27	3	8	-1	16

【解答】

部分積分法を用いる．

$$\begin{aligned}\int xe^{-3x}\,dx &= x\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx \\ &= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\ &= -\left(\frac{\mathbf{3}x+\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)e^{-3x} + C \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．また

$$\begin{aligned}\int x^2e^{-3x}\,dx &= x^2\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int 2x\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx \\ &= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} + \frac{2}{3}\int xe^{-3x}\,dx \\ &= -\frac{1}{3}x^2e^{-3x} - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3x+1}{9}\right)e^{-3x} + C \quad (\because ①) \\ &= -\left(\frac{\mathbf{9}x^2+\mathbf{6}x+\mathbf{2}}{\mathbf{27}}\right)e^{-3x} + C \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

次に，$(9x^2-1)e^{-3x} = (3x+1)(3x-1)e^{-3x}$ の積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における符号は $x = \dfrac{1}{3}$ で負から正に変わるから，積分区間を分けて絶対値をはずし定積分を計算すると

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 |(9x^2-1)e^{-3x}|\,dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{3}} (9x^2-1)e^{-3x}\,dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (9x^2-1)e^{-3x}\,dx \\
&= -9\int_0^{\frac{1}{3}} x^2e^{-3x}\,dx + \int_0^{\frac{1}{3}} e^{-3x}\,dx + 9\int_{\frac{1}{3}}^1 x^2e^{-3x}\,dx - \int_{\frac{1}{3}}^1 e^{-3x}\,dx \\
&= 9\left\{-\left[-\left(\frac{9x^2+6x+2}{27}\right)e^{-3x}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[-\left(\frac{9x^2+6x+2}{27}\right)e^{-3x}\right]_{\frac{1}{3}}^1\right\} \\
&\qquad\qquad + \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{\frac{1}{3}} - \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{\frac{1}{3}}^1 \qquad (\because\ ②) \\
&= 9\left\{2\left(\frac{1+2+2}{27}\right)e^{-1} - \frac{2}{27} - \frac{9+6+2}{27}e^{-3}\right\} + 2\left(-\frac{1}{3}e^{-1}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3} \\
&= \left(\frac{10}{3}e^{-1} - \frac{2}{3} - \frac{17}{3}e^{-3}\right) - \frac{2}{3}e^{-1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3} \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{8}{3}e^{-1} - \frac{16}{3}e^{-3} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}(-1+8e^{-1}-16e^{-3})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である.