$S=\displaystyle\int_1^{e^3} x^2(\log x)^2\,dx$ とする．$\log\left(\dfrac{27S+2}{65}\right)$ の値を求めよ．
ただし，e は自然対数の底，$\log x$，$\log\left(\dfrac{27S+2}{65}\right)$ は自然対数とする．

(22 自治医大 医 17)

【答】 9

【解答】
部分積分法を用いる．

$$
\begin{aligned}
S &= \int_1^{e^3} x^2(\log x)^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\cdot(\log x)^2\right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3}\frac{1}{3}x^3\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= 3e^9 - \int_1^{e^3}\frac{2}{3}x^2\log x\,dx \\
&= 3e^9 - \left[\frac{2}{9}x^3\cdot\log x\right]_1^{e^3} + \int_1^{e^3}\frac{2}{9}x^3\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= 3e^9 - \frac{2}{3}e^9 + \left[\frac{2}{27}x^3\right]_1^{e^3} \\
&= \frac{7}{3}e^9 + \frac{2}{27}(e^9-1) \\
&= \frac{65e^9-2}{27}
\end{aligned}
$$

である．したがって

$$\log\left(\frac{27S+2}{65}\right) = \log e^9 = \mathbf{9} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．