$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{\boxed{\text{へ}}}{\boxed{\text{ホマ}}}$$ である．

(22 藤田医大 1(11))

【答】

へ	ホマ
8	15

【解答】

置換積分法を用いる．

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x(-\cos x)'\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)^2(-\cos x)'\,dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\cos^2 x+\cos^4 x)(\cos x)'\,dx \\
&= -\Big[\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5} \\
&= \boldsymbol{\frac{8}{15}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

- 一般化しておこう．

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ (n は正の整数) とおく．

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\cos^2 x)\,dx \quad (n \geqq 3) \\
&= I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^{n-2} x(\sin x)'\,dx \\
&= I_{n-2} - \Big[\cos x \cdot \frac{1}{n-1}\sin^{n-1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)\cdot\frac{1}{n-1}\sin^{n-1} x\,dx \\
&= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n
\end{aligned}$$

式を整理すると

$$\Big(1+\frac{1}{n-1}\Big) I_n = I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つ．繰り返し用いると

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} I_1 = \frac{8}{15}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}\cdot 1 = \frac{8}{15}$$

である．