関数 $g(x)=xe^{3x}$ について，

$$g'(x)=\left(\boxed{17}\,x+\boxed{18}\right)e^{3x},$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\boxed{19}}{\boxed{20}}e^3+\frac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$$

(22 関東学院大 理工・建築・環境・人間共生 5(2))

【答】

17	18	19	20	21	22
3	1	2	9	1	9

【解答】

$g(x)=xe^{3x}$ より

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1\cdot e^{3x}+xe^{3x}\cdot 3 \\ &= (\mathbf{3}x+\mathbf{1})e^{3x} \end{aligned}$$ ……(答)

である．次に，部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x)\,dx &= \int_0^1 xe^{3x}\,dx \\ &= \left[x\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot\frac{1}{3}e^{3x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}e^3-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}e^3-\frac{1}{9}\left(e^3-1\right) \\ &= \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}e^3+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

- 積分の計算において，前半の利用を考えると

  $$xe^{3x}=\frac{1}{3}(g'(x)-e^{3x})=\frac{1}{3}\left(g(x)-\frac{e^{3x}}{3}\right)'=\frac{1}{9}\{(3x-1)e^{3x}\}'$$

  より

  $$\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{9}\left[(3x-1)e^{3x}\right]_0^1=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$$

  である．