極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}\int_2^{\sqrt{x}}\log(1+t^2)\,dt$ を求めよ．ただし，log は自然対数を表す．

(22 電気通信大 後 5(1)(ii))

【答】 $\dfrac{1}{4}\log 5$

【解答】

$\sqrt{x}=X$ とおく．$\log(1+t^2)$ の原始関数を $F(t)$ とすると

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \lim_{X\to 2}\frac{1}{X^2-4}\Big[F(t)\Big]_2^X \\ &= \lim_{X\to 2}\frac{F(X)-F(2)}{X-2}\cdot\frac{1}{X+2} \\ &= F'(2)\cdot\frac{1}{2+2} \\ &= \frac{1}{4}\log(1+2^2) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\log 5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

- $\displaystyle\int_2^{\sqrt{x}}\log(1+t^2)\,dt=G(x)$ とおくと，$G(4)=0$ であるから

  $$(\text{与式})=\lim_{x\to 4}\frac{G(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{G(x)-G(4)}{x-4}=G'(4)$$

  である．ここで

  $$G'(x)=\log(1+(\sqrt{x})^2)\cdot(\sqrt{x})'=\log(1+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

  であるから

  $$(\text{与式})=\frac{\log(1+4)}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}\log 5$$

  である．