$\displaystyle\int_1^a \left(\log x - \frac{1}{x}\right) dx = 0$ となるような正の実数 a の値をすべて求めなさい．

(22 龍谷大 先端理工 1(3))

【答】 1，e

【解答】

部分積分法により

$$\begin{aligned}\int \log x\, dx &= x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= x\log x - x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_1^a \left(\log x - \frac{1}{x}\right) dx &= \Big[(x\log x - x) - \log|x|\Big]_1^a \\ &= a\log a - a - \log a + 1 \\ &= (a-1)(\log a - 1)\end{aligned}$$

である．

よって，$\displaystyle\int_1^a \left(\log x - \frac{1}{x}\right) dx = 0$ となるような正の実数 a の値は

$(a-1)(\log a - 1) = 0$

$a = 1$ または $\log a = 1$

$a = 1$ または e （どちらも $a > 0$ を満たす）

であり，a の値のすべては

1，$\boldsymbol{e}$ ……(答)

である．