微分可能な関数 $f(x)$ に対し，$g(x)=f(x)e^{-x}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)=f(x)+g'(x)e^{x}$ であることを示せ．

(2) ある定数 a に対し，等式

$$f(x)=\int_a^x \{f(t)-4te^{-t}\}\,dt$$

が成立し，かつ $f(0)=1$ であるとき，$f(x)$ および a の値を求めよ．

(22 岩手大 教育 5)

【答】

(1) 略

(2) $f(x)=(2x+1)e^{-x}$，$a=-\dfrac{1}{2}$

【解答】

$$g(x)=f(x)e^{-x}$$

(1) $f(x)=g(x)e^{x}$ であり

$$\begin{aligned}f'(x)&=g'(x)e^{x}+g(x)e^{x}\\&=g'(x)e^{x}+f(x)e^{-x}\cdot e^{x}\\&=f(x)+g'(x)e^{x}\end{aligned}$$

である．　　　　……(証明終わり)

(2) $f(x)=\displaystyle\int_a^x \{f(t)-4te^{-t}\}\,dt$ の両辺を x で微分すると

$$f'(x)=f(x)-4xe^{-x}$$

である．(1) の式に代入して

$$f(x)-4xe^{-x}=f(x)+g'(x)e^{x}$$

$$\therefore\quad g'(x)=-4xe^{-2x}$$

辺々を積分すると

$$\begin{aligned}g(x)&=\int\left(-4xe^{-2x}\right)\,dx\\&=-4x\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}-\int(-4)\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx\\&=2xe^{-2x}-\int 2e^{-2x}\,dx\\&=2xe^{-2x}-2\cdot\frac{e^{-2x}}{-2}+C\quad(C\text{ は積分定数})\\&=(2x+1)e^{-2x}+C\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(x)=g(x)e^{x}=(2x+1)e^{-x}+Ce^{x}$$

ここで，$f(0)=1$ より

$$1+C=1\qquad\therefore\quad C=0$$

であり

$$\boldsymbol{f(x)=(2x+1)e^{-x}}\qquad\text{……(答)}$$

である．また，$f(a)=0$ であるから

$$(2a+1)e^{-a}=0\qquad\therefore\quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{2}}\qquad\text{……(答)}$$

である．