次の問に答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ を求めよ．

(2) $x \fallingdotseq 0$ を満たすすべての実数 x に対して，$e^x > 1+x$ と $e^{-x^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $\dfrac{2}{3} < \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \dfrac{\pi}{4}$ が成り立つことを証明せよ．

(22 北里大 医 2)

【答】

(1) $\dfrac{\pi}{4}$

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1) $x = \tan\theta$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) $f(x) = e^x - 1 - x$ とおくと

$$f'(x) = e^x - 1$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(x)$ の増減は右表となる．

よって，$x \fallingdotseq 0$ を満たすすべての x に対して

$$f(x) > 0$$

すなわち

$$e^x > 1+x \qquad \cdots\cdots ①$$

……(証明終わり)

が成り立つ．①において，x を x^2 に置き換えると，$x \fallingdotseq 0$ を満たすすべての x に対して

$$e^{x^2} > 1+x^2$$

が成り立つ．両辺は正であるから逆数をとると，$x \fallingdotseq 0$ を満たすすべての x に対して

$$e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

……(証明終わり)

が成り立つ．

(3) ① において，x を $-x^2$ に置き換えると，$x \fallingdotseq 0$ を満たすすべての x に対して

$$e^{-x^2} > 1 - x^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．②，③ より $0 \leqq x \leqq 1$ において

$$1 - x^2 \leqq e^{-x^2} \leqq \frac{1}{1+x^2}$$

が成り立つ．どちらの等号も $x = 0$ のときのみ成り立つ．したがって

$$\int_0^1 (1 - x^2)\,dx < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \frac{\pi}{4} \quad (\because\ (1))$$

$$\therefore\quad \frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2}\,dx < \frac{\pi}{4} \qquad \cdots\cdots\text{(証明終わり)}$$

が成り立つ．