正の整数 $m,\ n$ に対して，

$$A(m,\ n)=(m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx$$

とおく．

(1) $e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$ を証明せよ．
(2) 各 m に対して，$b_m=\lim_{n\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ．
(3) 各 n に対して，$c_n=\lim_{m\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ．

(22 千葉大 8)

【答】
(1) 略
(2) $b_m=1$
(3) $c_n=e^{-\frac{1}{n}}$

【解答】

$$A(m,\ n)=(m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \quad (m,\ n \text{ は正の整数})$$

(1) 関数 $y=e^{-x}$ は減少関数であり，積分区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ において

$$e^0 \geqq e^{-x} \geqq e^{-\frac{1}{n}}$$
$$x^m \geqq x^m e^{-x} \geqq x^m e^{-\frac{1}{n}} \quad (\because\ x^m \geqq 0)$$

区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ で積分すると

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-\frac{1}{n}}\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m\,dx$$
$$e^{-\frac{1}{n}}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^{\frac{1}{n}} \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^{\frac{1}{n}}$$
$$\therefore\ e^{-\frac{1}{n}}\frac{1}{(m+1)n^{m+1}} \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{(m+1)n^{m+1}} \qquad \cdots\cdots ①$$

$(m+1)n^{m+1}(>0)$ をかけると

$$e^{-\frac{1}{n}} \leqq (m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq 1$$
$$\therefore\ e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$$

を得る．　……(証明終わり)

(2) $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}}=1$ であるから，はさみうちの原理より

$$b_m=\lim_{n\to\infty} A(m,\ n)=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 部分積分法により

$$\begin{aligned} A(m,\ n) &= (m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \\ &= (m+1)n^{m+1}\left\{\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{n}} - \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot e^{-x}(-1)\,dx\right\} \\ &= n^{m+1}\left(\frac{1}{n^{m+1}}e^{-\frac{1}{n}} + \int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx\right) \\ &= e^{-\frac{1}{n}} + n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

である．① において m を $m+1$ とおくと

$$e^{-\frac{1}{n}}\frac{1}{(m+2)n^{m+2}} \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{(m+2)n^{m+2}}$$

$$\therefore\quad e^{-\frac{1}{n}}\frac{1}{(m+2)n} \leqq n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{(m+2)n}$$

が成り立ち

$$\lim_{m\to\infty} e^{-\frac{1}{n}}\frac{1}{(m+2)n} = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{(m+2)n} = 0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{m\to\infty} n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx = 0$$

であり

$$\boldsymbol{c_n = \lim_{m\to\infty} A(m,\ n) = e^{-\frac{1}{n}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

を得る．