自然数 n に対して

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^\pi (1+x)\sin^n x\,dx$$

とおく．

(1) I_1 と I_2 を求めよ．答えは値のみを記せばよい．
(2) $n \geqq 3$ のとき，等式 $n^2 I_n = (n-1)(n-2)I_{n-2}$ が成り立つことを示せ．
(3) $n \geqq 2$ のとき，$I_{n-1}I_n$ を n を用いて表せ．
(4) $n \geqq 2$ のとき，不等式 $I_n < I_{n-1}$ が成り立つことを示せ．
(5) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 {I_n}^2$ を求めよ．

(22 富山大 理・医・薬 2)

【答】

(1) $I_1 = \pi + 2$，$I_2 = \dfrac{\pi}{8}(\pi+2)$

(2) 略

(3) $I_{n-1}I_n = \dfrac{\pi(\pi+2)^2}{2n^2(n-1)}$

(4) 略

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 {I_n}^2 = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2}$

【解答】

(1) 部分積分法を用いる．

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\pi (1+x)\sin x\,dx \\
&= \Big[(1+x)(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot(-\cos x)\,dx \\
&= (1+\pi) + 1 + \Big[\sin x\Big]_0^\pi \\
&= \boldsymbol{\pi + 2} && \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+x)\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+x)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^\pi (1+x)\,dx - \frac{1}{4}\int_0^\pi (1+x)\cos 2x\,dx
\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^\pi (1+x)\,dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \pi + \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}(\pi+2)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (1+x)\cos 2x\,dx &= \left[(1+x)\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2}\,dx \\
&= 0 - \left[\frac{-\cos 2x}{4}\right]_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

であるから

$$I_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}(\pi+2) = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}(\pi+2)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $n \geqq 3$ として，部分積分法を用いる．

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx \\
&= \frac{1}{n}\Big[(1+x)\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\pi} \\
&\qquad -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\{1\cdot\sin^{n-1}x+(1+x)(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\}(-\cos x)\,dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\{\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(1+x)\sin^{n-2}x\cos^2 x\}\,dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x(\sin x)'\,dx+\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= \frac{1}{n}\Big[\frac{\sin^n x}{n}\Big]_0^{\pi}+\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-2}x\,dx-\frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^n x\,dx \\
&= 0+\frac{(n-1)(n-2)}{n}I_{n-2}-(n-1)I_n \quad (\because\ n \geqq 3 \text{ より } I_{n-2}\text{も定義可能})
\end{aligned}
$$

I_n をまとめると

$$
\begin{aligned}
nI_n &= \frac{(n-1)(n-2)}{n}I_{n-2} \\
\therefore\quad n^2 I_n &= (n-1)(n-2)I_{n-2} \quad (n \geqq 3)
\end{aligned}
$$

……(証明終わり)

が成り立つ．

(3) $n \geqq 3$ のとき，(2) の結果式の辺々に $(n-1)I_{n-1}$ をかけると

$$n^2(n-1)I_nI_{n-1} = (n-1)^2(n-2)I_{n-1}I_{n-2}$$

であり，数列 $\{n^2(n-1)I_nI_{n-1}\}$ は一定であるから，

$$n^2(n-1)I_nI_{n-1} = 2^2\cdot 1\cdot I_2I_1 \quad (n \geqq 3)$$

が成り立ち，これは $n=2$ のときも成立する．ここで

$$2^2\cdot 1\cdot I_2I_1 = 4\cdot 1\cdot(\pi+2)\cdot\frac{\pi}{8}(\pi+2) = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2}$$

であるから

$$\boldsymbol{I_{n-1}I_n = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2n^2(n-1)}} \quad (n \geqq 2)$$

……(答)

が成り立つ．

- 次のように処理してもよい．

  $n \geqq 3$ のとき，(2) の結果より

$$I_n = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}I_{n-2} \qquad \therefore\quad I_nI_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}I_{n-1}I_{n-2}$$

  であるから，これを繰り返し用いて

$$
\begin{aligned}
I_nI_{n-1} &= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)^2}I_{n-2}I_{n-3} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{(n-2)^2} \\
&\qquad \cdot\cdots\cdot\frac{4\cdot 3}{5^2}\cdot\frac{3\cdot 2}{4^2}\cdot\frac{2\cdot 1}{3^2}\cdot I_2I_1 \\
&= \frac{2^2\cdot 1}{n^2(n-1)}\cdot I_2I_1 \\
&= \frac{2^2}{n^2(n-1)}\cdot\frac{\pi}{8}(\pi+2)\cdot(\pi+2) \\
&= \frac{\pi(\pi+2)^2}{2n^2(n-1)}
\end{aligned}
$$

$n=2$ のとき，(1) の結果より

$$I_2 I_1 = \frac{\pi}{8}(\pi+2)\cdot(\pi+2) = \frac{\pi}{8}(\pi+2)^2$$

であり，上式は $n=2$ でも成立する．

よって

$$I_{n-1}1_n = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2n^2(n-1)} \quad (n \geqq 2)$$

が成り立つ．

(4) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} I_{n-1} - I_n &= \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-1}x\,dx - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^n x\,dx \\ &= \int_0^{\pi}(1+x)\left(\frac{\sin^{n-1}x}{n-1} - \frac{\sin^n x}{n}\right)dx \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{\sin^n x}{n} \leqq \frac{\sin^{n-1}x\sin x}{n-1} \quad (\text{等号は } x=0,\ \pi \text{ のとき成立する})$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ においては $0 \leqq \sin x \leqq 1$，$0 \leqq \sin^{n-1}x \leqq 1$ であるから

$$\sin^{n-1}x\sin x \leqq \sin^{n-1}x$$

$$\therefore \quad \frac{\sin^n x}{n} \leqq \frac{\sin^{n-1}x}{n-1}$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ においては $1+x>0$ でもあるから

$$(1+x)\left(\frac{\sin^{n-1}x}{n-1} - \frac{\sin^n x}{n}\right) \geqq 0$$

恒等的に 0 ではないから

$$I_{n-1} - I_n > \int_0^{\pi}(1+x)\left(\frac{\sin^{n-1}x}{n-1} - \frac{\sin^n x}{n}\right)dx > 0$$

よって

$$I_n < I_{n-1}$$

が成り立つ．　　……(証明終わり)

(5) (4) から，$n \geqq 2$ のとき

$$I_{n+1} < I_n < I_{n-1}$$

が成り立つ．辺々に $n^3 I_n$ (>0) をかけると

$$n^3 I_{n+1} I_n < n^3 {I_n}^2 < n^3 I_{n-1} I_n$$

ここで，(3) より

$$n^3 I_{n-1} I_n = n^3 \cdot \frac{\pi(\pi+2)^2}{2n^2(n-1)} = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{\pi(\pi+2)^2}{2}$$

$$n^3 I_n I_{n+1} = n^3 \cdot \frac{\pi(\pi+2)^2}{2(n+1)^2 n} = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \frac{\pi(\pi+2)^2}{2}$$

はさみうちの原理より

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n^3 {I_n}^2 = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2}} \qquad \text{……(答)}$$

である．