関数 $f(x)$ を $f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)$ $(x>0)$ とする．また，数列 $\{I_n\}$ を次の式で定める．

$$I_n=\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\log I_n=f(n)+f(n-1)+\cdots+f(2)+f(1)$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ の正負および増減を調べよ．また，正の整数 k に対して，不等式 $\displaystyle\int_k^{k+1}f(x)\,dx<f(k)$ が成り立つことを示せ．

(3) n を正の整数とする．このとき，不等式 $\displaystyle\int_1^{n+1}f(x)\,dx<\log I_n$ が成り立つことを示せ．

(4) n を正の整数とする．このとき $\displaystyle\int_1^{n}f(x)\,dx$ を求めよ．

(5) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sqrt{3}I_n>\frac{2}{3}\sqrt{2n+3}\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{n+1}$$

(22 山梨大 工 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) 略

(4) $\displaystyle\int_1^{n}f(x)\,dx=\log\left\{\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right\}$

(5) 略

【解答】

$$f(x)=\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)\ (x>0)$$

(1) 対数の性質より

$$\begin{aligned}
&\log I_n\\
&=\log\left(\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\right)\\
&=\log\frac{2n+1}{2n}+\log\frac{2n-1}{2n-2}+\cdots+\log\frac{5}{4}+\log\frac{3}{2}\\
&=\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2n-2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{2\cdot2}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2\cdot1}\right)\\
&=f(n)+f(n-1)+\cdots+f(2)+f(1)
\end{aligned}$$

が成り立つ．　　　　……(証明終わり)

(2) $x>0$ のとき，$1+\dfrac{1}{2x}>1$ であるから，

$$f(x)=\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)>0$$

……(証明終わり)

である．さらに

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{2x}} \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{(2x+1)x} < 0 \quad (\because\ x > 0)$$

であり，$f(x)$ は減少関数である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　…… (証明終わり)

- $x > 0$ において，$1 + \frac{1}{2x}$ は減少し，$\log x$ は増加するから，$f(x) = \log\left(1+\frac{1}{2x}\right)$ は減少関数である．

$f(x)$ は減少関数であるから，$k \leqq x \leqq k+1$ において $f(x) \leqq f(k)$ であり，等号が成立するのは $x = k$ のときのみである．したがって，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx < \int_k^{k+1} f(k)\,dx$$

$$\therefore\quad \int_k^{k+1} f(x)\,dx < f(k)$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　…… (証明終わり)

(3) (2) の不等式において $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ とし，辺々の和をとれば，不等式

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx < f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

$$\therefore\quad \int_1^{n+1} f(x)\,dx < \log I_n \quad (\because\ \text{右辺は (1) による})$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　…… (証明終わり)

(4) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)\,dx &= \int_1^n (x)' \log\left(1+\frac{1}{2x}\right)\,dx \\ &= \left[x\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right]_1^n - \int_1^n x \cdot \frac{-1}{(2x+1)x}\,dx \\ &= n\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \log\frac{3}{2} + \left[\frac{1}{2}\log|2x+1|\right]_1^n \\ &= n\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log(2n+1) - \frac{1}{2}\log 3 \\ &= \log\left\{\sqrt{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right\} - \log\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= \boldsymbol{\log\left\{\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right\}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

を得る．

(5) (4) の n を $n+1$ とおくことにより，(3) の不等式は

$$\log\left\{\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{2(n+1)+1}\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right)^{n+1}\right\} < \log I_n$$

$\log x$ は単調増加な関数であるから

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{2n+3}\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{n+1} < I_n$$

$$\therefore\quad \sqrt{3}I_n > \frac{2}{3}\sqrt{2n+3}\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^{n+1}$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　…… (証明終わり)