以下の問いに答えなさい.

(1) 次の関数 $f(x)$ が，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $f(x) \geqq 0$ であることを証明しなさい.

$$f(x) = x - \sin x$$

(2) 次の関数 $g(x)$ が，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $g(x) \geqq 0$ であることを証明しなさい.

$$g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$$

(3) 次の不等式を証明しなさい.

$$1 - \frac{1}{e} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,dx \leqq \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

(22 岩手県大 後期 ソフト情 4)

【答】 略

【解答】

(1) $$f(x) = x - \sin x \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において

$$f'(x) = 1 - \cos x > 0$$

であり，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)$ は単調増加かつ $f(0) = 0$ であるから

$$f(x) \geqq 0$$

である. ……(証明終わり)

(2) $$g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x \ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

であり，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において $g'(x)$ は単調減少かつ $g'(0) = 1 - \dfrac{2}{\pi} > 0$, $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{\pi} < 0$ であるから，$g'(x)$ の符号が正から負に変わる x がただ 1 つ存在する．その値を α とおくと，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $g(x)$ の増減は下表となる.

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$g(0) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから，

$$g(x) \geqq 0$$

である. ……(証明終わり)

(3) (1)，(2) より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$$\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq x \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ．したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ においては

$$\begin{aligned}
&e^{-\frac{2}{\pi}x} \geqq e^{-\sin x} \geqq e^{-x} \\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}x}\,dx \\
&\Big[-e^{-x}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,dx \leqq \Big[-\frac{\pi}{2}e^{-\frac{2}{\pi}x}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&-(e^{-\frac{\pi}{2}} - e^0) \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,dx \leqq -\frac{\pi}{2}\left(e^{-1} - e^0\right) \\
\therefore\quad &1 - e^{-\frac{\pi}{2}} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,dx \leqq \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，$1 < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $e < e^{\frac{\pi}{2}}$ であり

$$e^{-\frac{\pi}{2}} < e^{-1}$$

である．すなわち

$$e^{-\frac{\pi}{2}} \leqq \frac{1}{e}$$

でもあり

$$1 - \frac{1}{e} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin x}\,dx \leqq \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

が成り立つ．　……(証明終わり)

- 不等式 $(*)$ はジョルダンの不等式と呼ばれている．
  これは $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x$ を 1 次式でおさえる不等式として有名である．右図のように図形的に捉えることができる．