関数 $f(x)=-xe^x$ を考える．曲線 $C: y=f(x)$ の点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_a とし，接線 l_a と y 軸の交点を $(0,\ g(a))$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) 接線 l_a の方程式と $g(a)$ を求めよ．

以下，a の関数 $g(a)$ が極大値をとるときの a の値を b とおく．

(2) b を求め，点 $(b,\ f(b))$ は曲線 C の変曲点であることを示せ．
(3) 曲線 C の点 $(b,\ f(b))$ における接線 l_b と x 軸の交点の x 座標 c を求めよ．さらに，$c \leqq x \leqq 0$ の範囲で曲線 C の概形と接線 l_b を xy 平面上にかけ．
(4) 曲線 C，接線 l_b および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(22 中央大 理工 3)

【答】
(1) $l_a: y=y=-(a+1)e^a x+a^2e^a$，$g(a)=a^2e^a$
(2) 略
(3) $c=-4$
(4) $S=\dfrac{9}{e^2}-1$

【解答】

$$C: y=f(x)=-xe^x$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^x-xe^x \\ &= -(x+1)e^x \end{aligned}$$

$C: y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線 l_a の方程式は

$$y=-(a+1)e^a(x-a)-ae^a$$

$$\therefore\quad l_a:\ \boldsymbol{y=-(a+1)e^a x+a^2e^a} \qquad \cdots\cdots ①$$ ……(答)

である．また，$g(a)$ は接線 l_a と y 軸の交点の y 座標であるから

$$\boldsymbol{g(a)=a^2e^a}$$ ……(答)

である．

(2) $g(a)$ を a で微分すると

$$\begin{aligned} g'(a) &= 2ae^a+a^2e^x \\ &= a(a+2)e^x \end{aligned}$$

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(a)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$g(a)$ の増減は右のようになるから，$g(a)$ が極大値をとるときの a の値 b は

$$\boldsymbol{b=-2}$$ ……(答)

である．さらに

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^x-(x+1)e^x \\ &= -(x+2)e^x \end{aligned}$$

であり，$f''(x)$ は $x=-2$ の前後で符号を変えるから，点 $(-2,\ f(-2))$ は C の変曲点である．

…… (証明終わり)

(3) 曲線 C の変曲点 $(b,\ f(b))$ における接線 l_b の方程式は ① に $a=-2$ を代入して

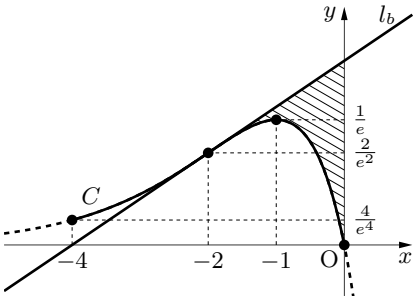
$$l_b : y = \frac{x}{e^2} + \frac{4}{e^2}$$

であり，接線 l_b と x 軸の交点の x 座標 c の値は

$$\boldsymbol{c = -4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．さらに，$-4 \leqq x \leqq 0$ の範囲における増減，凹凸は下左表となり，$-4 \leqq x \leqq 0$ の範囲での曲線 C の概形と接線 l_b は下右図となる．

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$\frac{4}{e^4}$	↗	$\frac{2}{e^2}$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0



(4) 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} \left\{ \left(\frac{x}{e^2} + \frac{4}{e^2} \right) - (-xe^x) \right\} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2e^2} + \frac{4}{e^2}x + (x-1)e^x \right]_{-2}^{0} \\ &= \boldsymbol{\frac{9}{e^2} - 1} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．