以下の問いに答えよ．

(1) 連立不等式 $x \geqq 2,\ 2^x \leqq x^y \leqq x^2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ．ただし，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい．

(2) $a > 0$ に対して，連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6$，$(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ の表す xy 平面上の領域の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

(22 北海道大 理 3)

【答】

(1) 略

(2) 2

【解答】

(1) $x \geqq 2$ のもとでは

$$2^x \leqq x^y \leqq x^2 \iff x\log 2 \leqq y\log x \leqq 2\log x$$
$$\iff \frac{x\log 2}{\log x} \leqq y \leqq 2 \quad (\because\ \log x > 0)$$

$f(x) = \dfrac{x\log 2}{\log x}$ とおく．

$$f'(x) = \frac{1\cdot\log x - x\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2}\log 2 = \frac{(\log x - 1)\log 2}{(\log x)^2}$$

$x \geqq 2$ での $f(x)$ の増減は下表となる．

x	2	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	$e\log 2$	↗

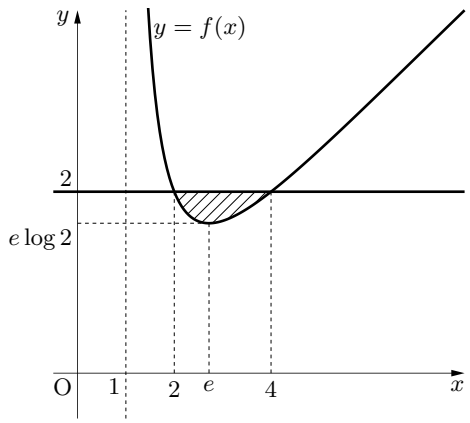
$2 < e < 3$,

$$f(2) = \frac{2\log 2}{\log 2} = 2,$$
$$f(4) = \frac{4\log 2}{\log 4} = 2$$

に注意すると，求める領域

$$\begin{cases} x \geqq 2 \\ f(x) \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

は右図の斜線部分となる．境界も含む．



(2) $a > 0$ に対して，$2 \leqq x \leqq 6$ のもとでは

$$(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$$
$$\iff (x^y - 2^x)(x^y - x^a) \leqq 0$$
$$\iff \begin{cases} 2^x \leqq x^a \\ 2^x \leqq x^y \leqq x^a \end{cases} \text{ または } \begin{cases} 2^x \geqq x^a \\ x^a \leqq x^y \leqq 2^x \end{cases}$$

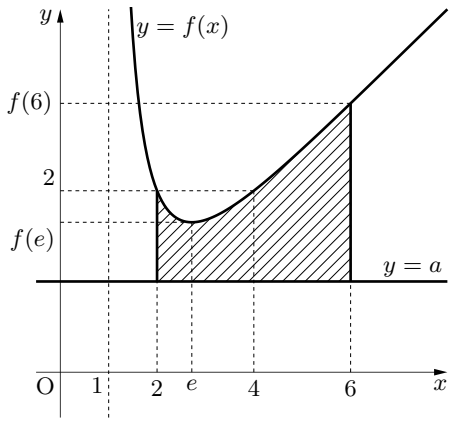
対数をとり，(1) の $f(x)$ を用いて表すと

$$\iff \begin{cases} f(x) \leqq a \\ f(x) \leqq y \leqq a \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a \leqq f(x) \\ a \leqq y \leqq f(x) \end{cases}$$

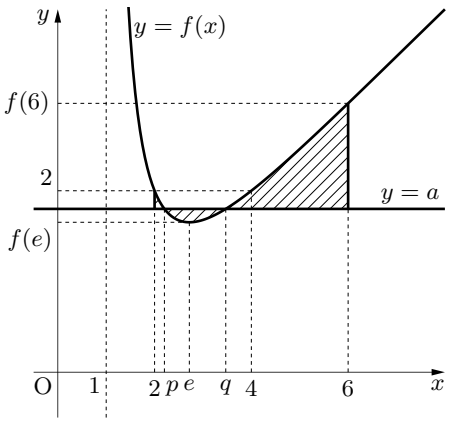
である．この不等式を満たす領域は，a の値を

(i) $0 < a \leqq f(e)$ $(= e\log 2)$
(ii) $f(e) \leqq a \leqq 2$
(iii) $2 \leqq a \leqq f(6)$ $\left(= \dfrac{6\log 2}{\log 6}\right)$
(iv) $f(6) \leqq a$

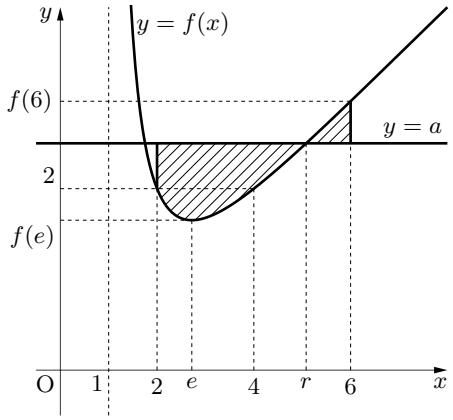
の 4 通りに場合分けすると，下図の斜線部分となる．



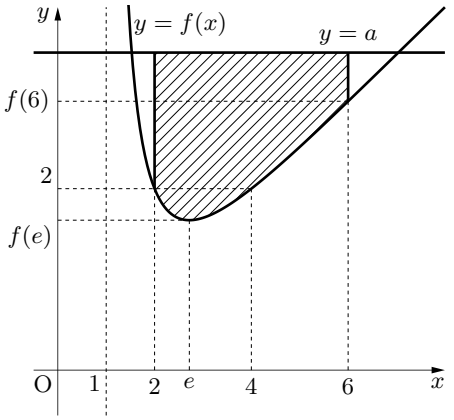
(i) の図



(ii) の図



(iii) の図



(iv) の図

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと，面積 $S(a)$ は

(i) のとき

$$S(a) = \int_2^6 \{f(x) - a\}\,dx = \Big[F(x) - ax\Big]_2^6 = F(6) - F(2) - 4a$$

$0 < a < f(e)$ のときの $S'(a)$ は

$$S'(a) = -4 < 0$$

(ii) のとき

$y = f(x)$ と $y = a$ は 2 点で交わる．それらの x 座標を $p,\ q$ $(2 \leqq p \leqq q \leqq 4)$ とおく．

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_2^p \{f(x) - a\}\,dx + \int_p^q \{a - f(x)\}\,dx + \int_q^6 \{f(x) - a\}\,dx \\ &= \Big[F(x) - ax\Big]_2^p - \Big[F(x) - ax\Big]_p^q + \Big[F(x) - ax\Big]_q^6 \\ &= 2\{F(p) - ap\} - \{F(2) - 2a\} - 2\{F(q) - aq\} + \{F(6) - 6a\} \end{aligned}$$

$f(e) < a < 2$ のときの $S'(a)$ は，$p,\ q$ は a の関数であることに注意すると

$$\begin{aligned} S'(a) &= 2\left\{f(p)\frac{dp}{da} - \left(p + a\frac{dp}{da}\right)\right\} + 2 - 2\left\{f(q)\frac{dq}{da} - \left(q + a\frac{dq}{da}\right)\right\} - 6 \\ &= -2p + 2 + 2q - 6 \quad (\because\ f(p) = f(q) = a) \\ &= 2(q - p) - 4 \\ &< 0 \quad (\because\ 2 < p < q < 4 \text{ であり}, \ q - p < 4 - 2 = 2) \end{aligned}$$

(iii) のとき

$y = f(x)$ と $y = a$ は 1 点で交わる．その x 座標を r $(4 \leqq r \leqq 6)$ とおく．

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_2^r \{a - f(x)\}\,dx + \int_r^6 \{f(x) - a\}\,dx \\ &= -\Big[F(x) - ax\Big]_2^r + \Big[F(x) - ax\Big]_r^6 \\ &= -2\{F(r) - ar\} + \{F(2) - 2a\} + \{F(6) - 6a\} \end{aligned}$$

$2 < a < f(6)$ のときの $S'(a)$ は，r は a の関数であることに注意すると

$$\begin{aligned} S'(a) &= -2\left\{f(r)\frac{dr}{da} - \left(r + a\frac{dr}{da}\right)\right\} + 2 - 6 \\ &= 2r - 4 \quad (\because\ f(r) = a) \\ &> 0 \quad (\because\ 4 < r < 6) \end{aligned}$$

(iv) のとき

$$S(a) = \int_2^6 \{a - f(x)\}\,dx = \Big[ax - F(x)\Big]_2^6 = 4a - F(6) + F(4)$$

$f(6) < a$ のときの $S'(a)$ は

$$S'(a) = 4 > 0$$

したがって，$S(a)$ の増減は下表となる．

a	(0)	$\cdots$	$f(e)$	$\cdots$	2	$\cdots$	$f(6)$	$\cdots$
$S'(a)$		$-$		$-$		$+$		$+$
$S(a)$		↘		↘		↗		↗

$S(a)$ は連続な関数であるから，$S(a)$ を最小にする a の値は

$$\mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．