xy 平面上において，

$$x = \sin t, \quad y = \cos t - \cos^2 t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される曲線 C について，次の問いに答えよ．

(1) $t = 0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}$ のときの曲線 C 上の点の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 C 上で y 座標が最大になる点の座標を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(22 山形大 工 4)

【答】

(1) 順に $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}\right)$, $(1,\ 0)$

(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

(3) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}$

【解答】

$$C : \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t - \cos^2 t \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $t = 0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}$ のときの点の座標はそれぞれ

$$\mathbf{(0,\ 0),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{2\sqrt{3}-3}{4}\right),\ (1,\ 0)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) y は

$$y = -\left(\cos t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

と変形され，x の動く範囲は $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos t = \dfrac{1}{2}$ すなわち $t = \dfrac{\pi}{3}$ のとき最大となる．よって，y 座標が最大になる点の座標は

$$\mathbf{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{4}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

x は単調増加で $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲を動き，
$t = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のときはどちらも $y = 0$ で，
$y = \cos t(1 - \cos t) \geqq 0$

であるから，曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - \cos^2 t)\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)(\sin t)'\, dt = \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

よって

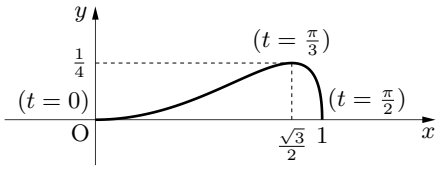
$$S = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 曲線 C の概形を描いておく．

$$\frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t(2\cos t - 1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$	$\rightarrow$	1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$+$	
y	0	$\uparrow$	$\frac{1}{4}$	$\downarrow$	0



であり，右図のようになる．