次の方程式で表される曲線 C_1，C_2 について考える．

$$C_1 : y = x^3 + 3x^2 + x - 4$$
$$C_2 : y = \cos^2 x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$$

C_1 の接線で原点を通るものを l_1 とし，C_2 の接線で l_1 と直交するものを l_2 とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) l_1 の方程式を求めなさい．
(2) l_2 の方程式を求めなさい．
(3) C_2，x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい．
(4) C_2 と l_2 の接点を通り，x 軸と平行な直線を l_3 とする．C_2，x 軸，y 軸および l_3 で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(22 岩手県大 ソフト情 4)

【答】

(1) $l_1 : y = x$
(2) $l_2 : y = -x + \dfrac{\pi + 2}{4}$
(3) $\dfrac{\pi}{4}$
(4) $\dfrac{\pi - 1}{4}$

【解答】

$$C_1 : y = x^3 + 3x^2 + x - 4$$
$$C_2 : y = \cos^2 x \ (0 \leqq x \leqq \pi)$$

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 4$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$$

より，C_1 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 + 6t + 1)(x - t) + t^3 + 3t^2 + t - 4$$
$$\therefore \quad y = (3t^2 + 6t + 1)x - 2t^3 - 3t^2 - 4 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．これが原点を通るとすると

$$0 = -2t^3 - 3t^2 - 4$$
$$(t + 2)(2t^2 - t + 2) = 0$$

ここで，$2t^2 - t + 2 = 2\left(t - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{15}{8} > 0$ であるから

$$t = -2$$

したがって，l_1 の方程式は ① で $t = -2$ として

$$\boldsymbol{y = x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $g(x) = \cos^2 x$ とおくと

$$g'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$$

l_2 は l_1 に直交するので，傾きは -1 であり $g'(x) = -1$ を満たす x は

$$-\sin 2x = -1 \qquad \therefore \quad \sin 2x = 1$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より，$0 \leqq 2x \leqq 2\pi$ であるから

$$2x = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad x = \frac{\pi}{4}$$

である．したがって，C_2 と l_2 の接点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$ であり，l_2 の方程式は

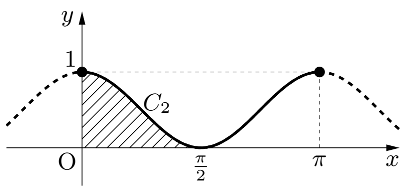
$$y = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y = -x + \frac{\pi + 2}{4}}$$ ……（答）

である．

(3) $$C_2 : g(x) = \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

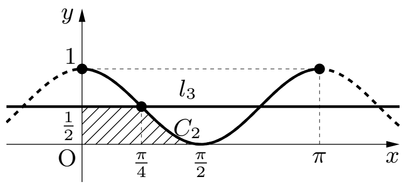
であり，C_2，x 軸および y 軸で囲まれた図形は右図の斜線部分である．この面積は



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$ ……（答）

である．

(4) C_2 と l_2 の接点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$ であるから，C_2，x 軸，y 軸および l_3 で囲まれた図形は右図の斜線部分である．この面積は



$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$$
$$= \frac{\pi}{8} + \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{8} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{\pi - 1}{4}}$$ ……（答）

である．