$f(x)=x^2-2\ (x \geqq 0)$ とする．関数 $y=f(x)$ の逆関数を $y=g(x)$ とする．

(1) $g(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の交点の座標を求めよ．

(3) x 軸の $x \geqq 0$ の部分と y 軸の $y \geqq 0$ の部分，および曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(22 徳島大 理工・医 1)

【答】

(1) $g(x)=\sqrt{x+2}$
(2) $(2,\ 2)$
(3) $\dfrac{20-8\sqrt{2}}{3}$

【解答】

(1) $y=x^2-2\ (x \geqq 0)$ …… ① を x について解くと

$$x^2=y+2\ (x \geqq 0) \iff x=\sqrt{y+2}$$

よって，① の逆関数は

$$\boldsymbol{g(x)=\sqrt{x+2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $y=f(x)\ (x \geqq 0)$ と $y=g(x)\ (x \geqq -2)$ の交点の x 座標は

$$(*)\begin{cases} x^2-2=\sqrt{x+2} \\ x \geqq 0 \end{cases}$$

の解である．

$$(*) \iff \begin{cases} (x^2-2)^2=x+2 \\ x^2-2 \geqq 0 \\ x \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^4-4x^2+4=x+2 \quad \cdots\cdots ② \\ x \geqq \sqrt{2} \end{cases}$$

② を整理すると

$$x^4-4x^2-x+2=0$$
$$(x-2)(x+1)(x^2+x-1)=0$$

$x \geqq \sqrt{2}$ においては $x+1>0,\ x^2+x-1>0$ であるから，解は

$$x=2$$

である．このとき $y=2$ であり，2 曲線の交点の座標は

$$\boldsymbol{(2,\ 2)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

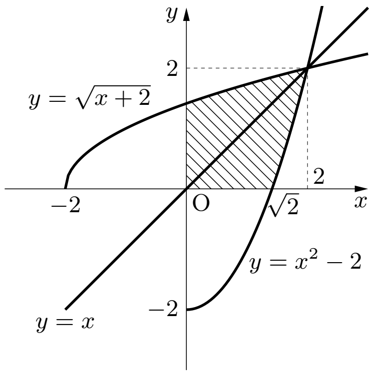
である．

(3) 与えられた図形は右図の斜線部分である．

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，この面積 S は

$$S=2\left\{\frac{1}{2}\cdot 2^2-\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^2-2)\,dx\right\}$$
$$=4-2\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$
$$=4-2\left(\frac{8}{3}-4\right)+2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{20-8\sqrt{2}}{3}}$$ ……(答)

である．



- 上側の面積を計算するなら

$$S=2\int_0^2(\sqrt{x+2}-x)\,dx$$
$$=2\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$=2\left(\frac{16}{3}-2-\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}\right)$$
$$=\frac{20-8\sqrt{2}}{3}$$

となる．