xy 平面において，原点を中心とした半径 1 の円を C，直線 $x = \cos\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$ を ℓ とする．円 C と直線 ℓ に接し，点 $(b,\ 0)$ $(b > 0)$ を中心とする円 C' を考える．

(1) 円 C と直線 ℓ の交点を A，B とするとき，円 C' の円周の長さが線分 AB の長さの 2 倍になるような α の値がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) $y > 0,\ x > \cos\alpha$，かつ，円 C の内部で，円 C' の外側である部分の面積 S を，α を用いて表せ．

(3) (2) で定義された S を最大にする α の値を β $(0 < \beta < \pi)$ とするとき，$\cos\beta$ を求めよ．

(22 東北大 後 理 5)

【答】

(1) 略

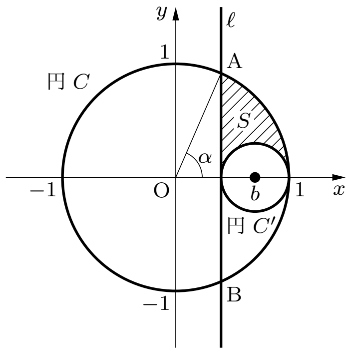
(2) $S = \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{\pi}{8}(1-\cos\alpha)^2$

(3) $\dfrac{\pi^2 - 16}{\pi^2 + 16}$

【解答】

$$C : x^2 + y^2 = 1$$

$$\ell : x = \cos\alpha\ (0 < \alpha < \pi)$$



(1) 円 C' の直径は $1 - \cos\alpha$ であるから

(円 C'の周の長さ) = 2(線分 AB の長さ)

$\pi(1-\cos\alpha) = 2 \times 2\sin\alpha$ $\cdots\cdots$ ①

$2\pi\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 4 \cdot 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} \fallingdotseq 0$ より

$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{4}{\pi}$ $\cdots\cdots$ ②

$0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ において，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ は単調増加であり，正の実数すべてを動くから，② を満たす α はただ 1 つ存在する． $\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha - \frac{1}{2}\times\pi\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\pi}{8}(1-\cos\alpha)^2} \end{aligned}$$
$\cdots\cdots$(答)

である．

(3) (2) の S を α で微分すると

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \frac{\pi}{4}(1-\cos\alpha)\sin\alpha \\ &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}(1-\cos\alpha)\sin\alpha \\ &= \sin^2\alpha - \frac{\pi}{4}(1-\cos\alpha)\sin\alpha \\ &= \frac{\sin\alpha}{4}\{4\sin\alpha - \pi(1-\cos\alpha)\} \quad (\text{これより①と同じ変形を行う}) \\ &= \frac{\sin\alpha}{4}\left(4\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - 2\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{4}{\pi} - \tan\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

$0<\alpha<\pi$ においては $\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから，S' の符号は $\dfrac{4}{\pi}-\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の符号と一致し，S は $\dfrac{4}{\pi}-\tan\dfrac{\alpha}{2}=0$ となる α で極大かつ最大となる．すなわち

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{4}{\pi}$$

である．このとき

$$\begin{aligned}\cos\beta&=\cos\left(2\cdot\frac{\beta}{2}\right)=2\cos^2\frac{\beta}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\dfrac{\beta}{2}}-1\\&=\frac{2}{1+\dfrac{16}{\pi^2}}-1\\&=\boldsymbol{\frac{\pi^2-16}{\pi^2+16}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．