a を正の定数とし，媒介変数 t によって

$$x = e^{-2} - e^{at}, \quad y = -2t + e^{2at}$$

で表されている曲線 C が，x 軸と接しているとする．このとき，次の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) a の値を求めよ．

(2) x 軸，y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(22 福岡大 医 3)

【答】

(1) $a = \dfrac{1}{e}$

(2) $\dfrac{4}{3}e\sqrt{e} - \dfrac{6}{e} - \dfrac{1}{3e^6}$

【解答】

$$C : \begin{cases} x = e^{-2} - e^{at} \\ y = -2t + e^{2at} \end{cases}$$

(1) 微分すると

$$\frac{dx}{dt} = -ae^{at}$$
$$\frac{dy}{dt} = -2 + 2ae^{2at}$$

C が x 軸と接する条件は，$y = \dfrac{dy}{dt} = 0$ を満たす実数 t が存在することである．

$$\begin{cases} -2t + e^{2at} = 0 \\ -2 + 2ae^{2at} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{2at} = 2t \\ a \cdot 2t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2at = 1 \\ e^1 = 2t \end{cases}$$

$$\therefore \quad t = \frac{e}{2}, \quad \boldsymbol{a = \frac{1}{e}}$$ ……(答)

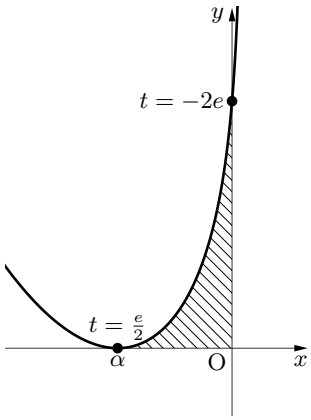
である．

(2) $a = \dfrac{1}{e}$ であるから

$$C : \begin{cases} x = e^{-2} - e^{\frac{t}{e}} \\ y = -2t + e^{\frac{2t}{e}} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{e}e^{\frac{t}{e}} \\ \dfrac{dy}{dt} = -2 + \dfrac{2}{e}e^{\frac{2t}{e}} \end{cases}$$

x，y の増減は下の左表となり，x 軸，y 軸および曲線 C で囲まれた部分は右の斜線部分となる．

t	$\cdots$	$\frac{e}{2}$	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$	$-$	$-$	$-$
x	$\leftarrow$		$\leftarrow$
$\frac{dy}{dt}$	$-$	0	$+$
y	$\downarrow$	0	$\uparrow$



$t=\dfrac{e}{2}$ のときの x 座標を α とおけば，求める面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{0} y\,dx = \int_{\frac{e}{2}}^{-2e} y\cdot\frac{dx}{dt}\,dt \\
&= \int_{\frac{e}{2}}^{-2e}\left(-2t+e^{\frac{2t}{e}}\right)\left(-\frac{1}{e}e^{\frac{t}{e}}\right)dt \\
&= \int_{-2e}^{\frac{e}{2}}\left(\frac{1}{e}e^{\frac{3t}{e}}-\frac{2t}{e}e^{\frac{t}{e}}\right)dt
\end{aligned}$$

ここで，$u=\dfrac{t}{e}$ とおくと

$$du=\frac{1}{e}\,dt \qquad \begin{array}{c|ccc} t & -2e & \longrightarrow & \dfrac{e}{2} \\ \hline u & -2 & \longrightarrow & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-2}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{e}e^{3u}\cdot e\,du-2\int_{-2}^{\frac{1}{2}}ue^{u}\cdot e\,du \\
&= \int_{-2}^{\frac{1}{2}}e^{3u}\,du-2e\int_{-2}^{\frac{1}{2}}ue^{u}\,du \\
&= \left[\frac{1}{3}e^{3u}\right]_{-2}^{\frac{1}{2}}-2e\left[(u-1)e^{u}\right]_{-2}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{3}\left(e^{\frac{3}{2}}-e^{-6}\right)-2e\left(-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+3e^{-2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(e^{\frac{3}{2}}-e^{-6}\right)+\left(e^{\frac{3}{2}}-6e^{-1}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{3}e\sqrt{e}-\frac{6}{e}-\frac{1}{3e^{6}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．