関数 $f(x)=(-x^2+3)e^x$ $(x \geqq -4)$ について，次の問に答えよ．ただし， e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(22 福岡大 理・工 3)

【答】

(1) 極小値 $-\dfrac{6}{e^3}$，極大値 $2e$

(2) $2(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}}-2(\sqrt{3}+1)e^{-\sqrt{3}}$

【解答】

$$f(x)=(-x^2+3)e^x \quad (x \geqq -4)$$

(1) 微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^x+(-x^2+3)e^x \\ &= -(x^2+2x-3)e^x \\ &= -(x+3)(x-1)e^x \end{aligned}$$

x	4	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘		↗		↘

$f(x)$ の増減は右表となる．

よって，$f(x)$ は

$x=-3$ のとき　**極小値 $-\dfrac{6}{e^3}$**，　……(答)

$x=1$ のとき　**極大値 $2e$**　……(答)

をとる．

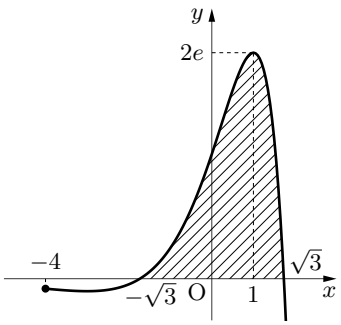
(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は

$$x=\pm\sqrt{3}$$

であり，求める部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(-x^2+3)e^x\,dx \\ &= \Big[\left\{(-x^2+3)-(-2x)+(-2)\right\}e^x\Big]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \Big[(-x^2+2x+1)e^x\Big]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \boldsymbol{2(\sqrt{3}-1)e^{\sqrt{3}}-2(\sqrt{3}+1)e^{-\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

……(答)



である．

- $\displaystyle\int f(x)e^x\,dx=\{f(x)-f'(x)+f''(x)-\cdots\}e^x+C$ (C は積分定数)