$f(x) = \log x + (\log x)^2$ とする．以下の各問に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値，グラフと x 軸との交点，グラフの凹凸，変曲点，極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$, $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$ を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(22 茨城大 理 1)

【答】

(1) 略

(2) $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x + C$ （C は積分定数），

$\displaystyle\int (\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + D$ （D は積分定数）

(3) $\dfrac{3}{e} - 1$

【解答】

$$f(x) = \log x + (\log x)^2$$

(1) $f(x)$ の定義域は，(真数) > 0 より $x > 0$ である．$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2\log x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 + 2\log x}{x},$$

$$f''(x) = \frac{\dfrac{2}{x}\cdot x - 1\cdot(1 + 2\log x)}{x^2} = \frac{1 - 2\log x}{x^2}$$

$f(x)$ の増減・凹凸は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		⤵		⤴		↱

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4},$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

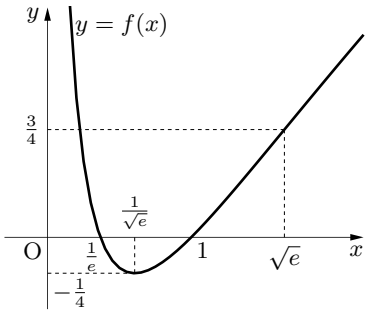
$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \log x(1 + \log x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

また，$f(x) = 0$ を解くと

$$\log x(1 + \log x) = 0 \quad \therefore \quad x = 1,\ x = \frac{1}{e}$$

以上より，関数 $y = f(x)$ は，$x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ で極小値 $-\dfrac{1}{4}$ をとり，変曲点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{3}{4}\right)$をもち，$x$ 軸との交点の座標は $(1,\ 0)$，$\left(\dfrac{1}{e},\ 0\right)$ であり，グラフは右図となる．



(2) 部分積分法を用いると

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \boldsymbol{x\log x - x + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\textbf{ は積分定数)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$\int (\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - \int x\cdot 2\cdot\frac{\log x}{x}\,dx$$
$$= \boldsymbol{x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + D} \quad \textbf{(}\boldsymbol{D}\textbf{ は積分定数)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

($\because$ 上式の結果を利用した)

である.

(3) 求める面積 S は

$$S = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\{\log x + (\log x)^2\}\,dx$$
$$= -\Big[\,(x\log x - x) + \{x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\}\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}$$
$$= -\Big[x(\log x)^2 - x\log x + x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}$$
$$= -1 + \left\{\frac{1}{e}\left(\log\frac{1}{e}\right)^2 - \frac{1}{e}\log\frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right\}$$
$$= -1 + \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{e} - 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.