

$f(x) = e^{x^2} - 1$ とする. 曲線 $y = f(x)$ を y 軸を回転軸として 1 回転させてできる形の容器に, 体積 V の水を入れたときの水面の高さを h , 水面の面積を S とする. ただし, 水面は回転軸と垂直とし, $V = 0$ のとき $h = 0$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の概形を座標平面上にかけ.
- (2) S と V を, h を用いてそれぞれ表せ.
- (3) 時刻 t における容器内の水の体積 V が $V = t$ となるように, この容器に水を注ぎ入れる. ただし, $t \geq 0$ とする. $h > 0$ のとき, 水面の上昇する速度を h を用いて表せ.

(22 公立はこだて未来大 シス情 5)

【答】

- (1) 略
- (2) $S = \pi \log(h + 1)$, $V = \pi \{(h + 1) \log(h + 1) - h\}$
- (3) $\frac{1}{\pi \log(h + 1)}$

【解答】

$$f(x) = e^{x^2} - 1$$

- (1) $f(-x) = f(x)$ が成立するので, $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である.

$x \geq 0$ において $f(x)$ は単調増加であり, さらに

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

であるから, $y = f(x)$ のグラフは右図となる.

- (2) 容器に体積 V の水を入れたときの水面の半径を r とすると, 水面の高さ h は $h = f(r)$ であるから

$$h = e^{r^2} - 1 \quad \therefore e^{r^2} = h + 1$$

$$\therefore r^2 = \log(h + 1)$$

$S = \pi r^2$ であるから

$$S = \pi \log(h + 1)$$

である. また

$$V = \int_0^h \pi x^2 dy = \pi \int_0^h \log(y + 1) dy \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$= \pi \left\{ [(y + 1) \log(y + 1)]_0^h - \int_0^h (y + 1) \cdot \frac{1}{y + 1} dy \right\}$$

$$= \pi \{(h + 1) \log(h + 1) - h\}$$

.....(答)

である.

- (3) $V = t$ のとき, ① より

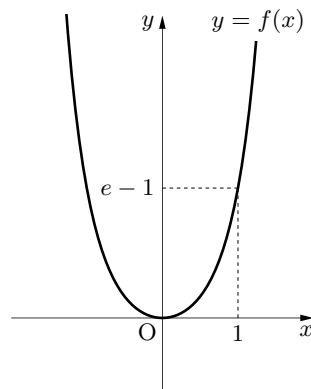
$$t = \pi \int_0^h \log(y + 1) dy \quad \therefore \frac{dt}{dh} = \pi \log(h + 1)$$

よって, 水面の上昇する速度 $\frac{dh}{dt}$ は

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dh}} = \frac{1}{\pi \log(h + 1)}$$

.....(答)

である.



.....(答)