$f(x)=e^{x^2}-1$ とする．曲線 $y=f(x)$ を $y$ 軸を回転軸として 1 回転させてできる形の容器に，体積 $V$ の水を入れたときの水面の高さを $h$，水面の面積を $S$ とする．ただし，水面は回転軸と垂直とし，$V=0$ のとき $h=0$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ の概形を座標平面上にかけ．

(2) $S$ と $V$ を，$h$ を用いてそれぞれ表せ．

(3) 時刻 $t$ における容器内の水の体積 $V$ が $V=t$ となるように，この容器に水を注き入れる．ただし，$t \geqq 0$ とする．$h>0$ のとき，水面の上昇する速度を $h$ を用いて表せ．

(22 公立はこだて未来大 シス情 5)

---

【答】

(1) 略

(2) $S=\pi\log(h+1)$，$V=\pi\{(h+1)\log(h+1)-h\}$

(3) $\dfrac{1}{\pi\log(h+1)}$

---

【解答】

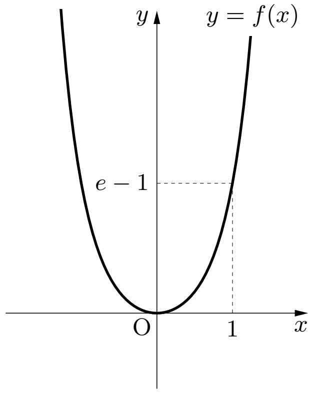
$$f(x)=e^{x^2}-1$$

(1) $f(-x)=f(x)$ が成立するので，$y=f(x)$ のグラフは $y$ 軸に関して対称である．

$x \geqq 0$ において $f(x)$ は単調増加であり，さらに

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．




(2) 容器に体積 $V$ の水を入れたときの水面の半径を $r$ とすると，水面の高さ $h$ は $h=f(r)$ であるから

$$h=e^{r^2}-1 \qquad \therefore\quad e^{r^2}=h+1$$

$$\therefore\quad r^2=\log(h+1)$$

$S=\pi r^2$ であるから

$$\boldsymbol{S=\pi\log(h+1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また

$$V=\int_0^h \pi x^2\,dy=\pi\int_0^h \log(y+1)\,dy \qquad \cdots\cdots ①$$

$$=\pi\left\{\Big[(y+1)\log(y+1)\Big]_0^h-\int_0^h (y+1)\cdot\frac{1}{y+1}\,dy\right\}$$

$$\boldsymbol{=\pi\{(h+1)\log(h+1)-h\}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $V=t$ のとき，① は

$$t=\pi\int_0^h \log(y+1)\,dy$$

となる．辺々を $t$ で微分すると

$$1=\pi\log(h+1)\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\pi\log(h+1)}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．