次の問いに答えよ．ただし，$3.14 < \pi < 3.15$ を用いてもよい．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq x$$

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，D_1 を曲線 $y = \sin x$ と直線 $y = \dfrac{2}{\pi}x$ で囲まれた図形とし，D_2 を曲線 $y = \sin x$ と 2 直線 $y = x$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形とする．次の (i)，(ii) に答えよ．

(i) D_1, D_2 の面積をそれぞれ求め，どちらの面積が大きいか調べよ．

(ii) D_1 を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

(22 札幌医大 4)

【答】

(1) 略

(2) (i) $(D_1\text{の面積}) = 1 - \dfrac{\pi}{4}$，$(D_2\text{の面積}) = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$，$D_2$ の面積の方が大きい　(ii) $\dfrac{\pi^2}{12}$

【解答】

(1) $f(x) = x - \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$$f'(x) = 1 - \cos x > 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$f(x)$ は単調増加であり，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$$f(x) \geqq f(0) = 0$$

であるから，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$$\sin x \leqq x \qquad \cdots\cdots ①$$

は成り立つ．

また，$g(x) = \sin x - \dfrac{2}{\pi}x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$g'(x) = 0$ となる x がただ 1 つ存在する．このときの x の値を α とおくと，$g(x)$ の増減は右のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	

$$g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

であり，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ においては $g(x) \geqq 0$ であるから，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において

$$\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x \qquad \cdots\cdots ②$$

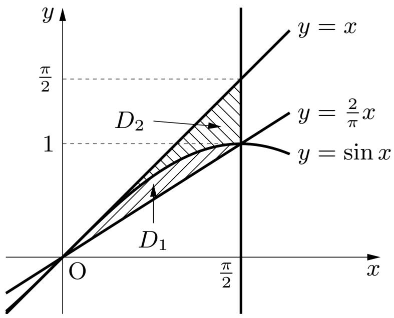
が成り立つ．

以上 ①，② より

$$\frac{2}{\pi}x \leqq \sin x \leqq x$$

は示された．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……(証明終わり)

(2) (i) D_1，D_2 は右図の斜線部分となる．面積をそれぞれ S_1，S_2 とおくと



$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1$$
$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{4}$$
$$= \mathbf{1 - \frac{\pi}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$
$$= \mathbf{\frac{\pi^2}{8} - 1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．これより

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} - 2$$
$$= \frac{1}{8}\{(\pi+1)^2 - 17\}$$

$3.14 < \pi < 3.15$ より

$$(\pi+1)^2 > 4.14^2 = 17.1396 > 17$$

であり，$S_2 - S_1 > 0$ である．

よって，$\boldsymbol{D_2}$ **の面積の方が大きい．** ……(答)

(ii) D_1 を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\sin^2 x\,dx - \frac{1}{3}\cdot\pi 1^2\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx - \frac{\pi^2}{6}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{6}$$
$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6}$$
$$= \mathbf{\frac{\pi^2}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．