座標空間内の点 $A(0,\ 0,\ 2)$ と点 $B(1,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする．S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $PQ = 2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

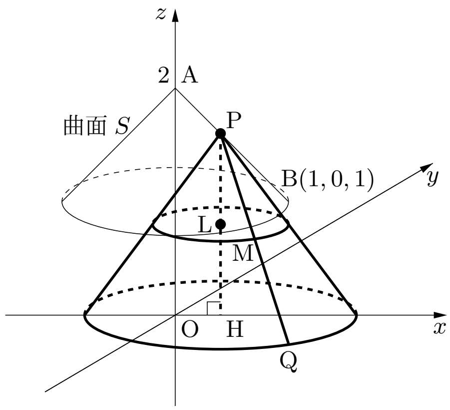
(22 東京大 理 5)

【答】 $\dfrac{4}{3}\pi^2 - 2\sqrt{3}\pi$

【解答】

M は線分 PQ の中点なので，M の z 座標を t とおくと，P の z 座標は $2t$ である．P は曲面 S 上の点であるから

$$1 \leqq 2t \leqq 2 \qquad \therefore \quad \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$$



である．P を線分 AB $\begin{cases} z = 2 - x \\ y = 0 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$ 上に固定すると

$$P(2(1-t),\ 0,\ 2t)$$

であり，P から xy 平面に下した垂線の足を H とおくと

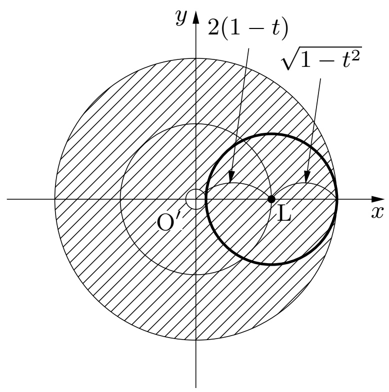
$$H(2(1-t),\ 0,\ 0)$$

である．$PQ = 2$ より

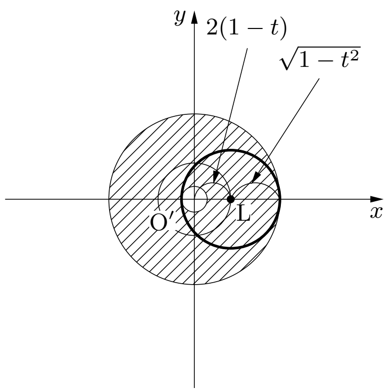
$$HQ = \sqrt{2^2 - PH^2} = \sqrt{4 - (2t)^2} = 2\sqrt{1-t^2}$$

であり，Q は H を中心とする半径 $2\sqrt{1-t^2}$ の円を描き，PQ の中点 M は平面 $z = t$ 上で PH の中点 $L(2(1-t),\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $\sqrt{1-t^2}$ の円を描く．

P を z 軸のまわりに 1 回転させると，M の軌跡も z 軸のまわりに 1 回転し，中心 L は平面 $z = t$ 上で点 $O'(0,\ 0,\ t)$ を中心とした半径 $2(1-t)$ の円を描く．M の軌跡の通過範囲は $2(1-t)$ と $\sqrt{1-t^2}$ の大小により場合分けされ，下図となる．



$\sqrt{1-t^2} \leqq 2(1-t)$ のとき



$2(1-t) \leqq \sqrt{1-t^2}$ のとき

$2(1-t)$ と $\sqrt{1-t^2}$ の大小によらず，M の軌跡の通過範囲は $O'(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $2(1-t) + \sqrt{1-t^2}$ の円から $O'(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $|2(1-t) - \sqrt{1-t^2}|$ の円を除いた

部分となる．その面積 $T(t)$ は

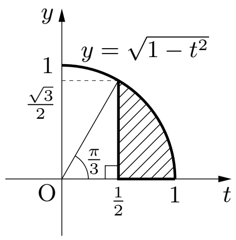
$$\begin{aligned} T(t) &= \pi\{2(1-t)+\sqrt{1-t^2}\}^2 - \pi|2(1-t)-\sqrt{1-t^2}|^2 \\ &= 8\pi(1-t)\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

となる．

よって，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} T(t)\,dt \\ &= 8\pi\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt\right) \end{aligned}$$

第 1 項の積分は右図を参照すると



$$\begin{aligned} V &= 8\pi\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right. \\ &\qquad \left. -\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}(1-t^2)'\left(-\frac{1}{2}\right)\,dt\right\} \\ &= 8\pi\left\{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \left[\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\right\} \\ &= 8\pi\left\{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \\ &= 8\pi\left\{\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \frac{\sqrt{3}}{8}\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi^2 - 2\sqrt{3}\pi} \end{aligned}$$

……(答)

である．