関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．ただし $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ を用いてよい．

(2) (1) の結果を用いて，e^{π} と π^{e} のどちらが大きいかを判定せよ．

(3) $y=f(x)$ のグラフの $y\geqq 0$ の部分，直線 $x=e$，および x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(22 東北学院大 工 A 4)

【答】

(1) $f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$，図は略

(2) $e^{\pi}>\pi^{e}$

(3) $\left(2-\dfrac{5}{e}\right)\pi$

【解答】

$$f(x)=\frac{\log x}{x}\ (x>0)$$

(1) 微分して

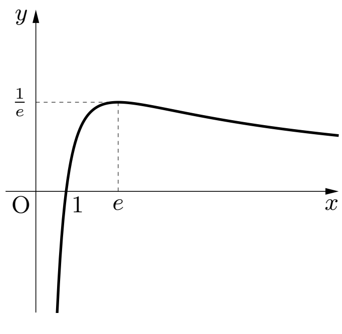
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}\\&=\frac{1-\log x}{x^2}\end{aligned}$$

$x>0$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$



でもあり，求めるグラフの概形は右図のようになる．

(2) (1) の結果より，$e\leqq x$ において $f(x)$ は単調減少である．$e<\pi$ であるから

$$f(e)>f(\pi)\qquad\therefore\quad \frac{\log e}{e}>\frac{\log\pi}{\pi}$$

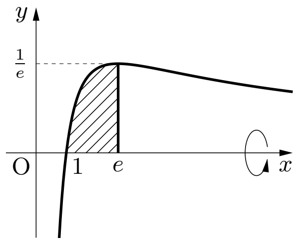
式を整理すると

$$\begin{aligned}&\pi\log e>e\log\pi\\&\log e^{\pi}>\log\pi^{e}\\&\therefore\quad \boldsymbol{e^{\pi}>\pi^{e}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

(3) 求める体積は



$$
\begin{aligned}
&\pi\int_1^e \{f(x)\}^2\,dx \\
&= \pi\int_1^e \left(\frac{\log x}{x}\right)^2\,dx \\
&= \pi\left\{\Big[-x^{-1}(\log x)^2\Big]_1^e + \int_1^e x^{-1}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\} \\
&= \pi\left(-\frac{1}{e} + 2\int_1^e x^{-2}\log x\,dx\right) \\
&= -\frac{\pi}{e} + 2\pi\left(\Big[-x^{-1}\log x\Big]_1^e + \int_1^e x^{-1}\cdot\frac{1}{x}dx\right) \\
&= -\frac{\pi}{e} - \frac{2\pi}{e} + 2\pi\Big[-x^{-1}\Big]_1^e \\
&= -\frac{3\pi}{e} + 2\pi\left(-\frac{1}{e}+1\right) \\
&= \boldsymbol{\left(2-\frac{5}{e}\right)\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である.