実数 x に対し，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = xe^{-x}$$

により定める．座標平面上の曲線 $C : y = f(x)$ に関して，次の問 (1)〜(5) に答えよ．解答欄（省略）には (1), (2), (4) については答えのみを，(3), (5) については答えだけでなく途中経過も書くこと．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f(x)$ の増減表を書け．ただし，極値も増減表に記入すること．

(2) $f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ を求め，C の変曲点の座標を求めよ．

(3) C の変曲点と，座標平面上の原点を通る直線を l とする．C と l で囲まれた領域の面積 S を求めよ．

(4) $a,\ b,\ c$ を定数とし，関数 $g(x)$ を $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ と定める．$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ が $g'(x) = x^2e^{-2x}$ を満たすとき，$a,\ b,\ c$ の値を求めよ．

(5) C と (3) で定めた l で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(22 立教大 理 2)

【答】

(1) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$，増減表は略．

(2) $f''(x) = (x-2)e^{-x}$，変曲点の座標は $(2,\ e^{-2})$

(3) $S = 1 - 5e^{-2}$

(4) $a = -\dfrac{1}{2},\ b = -\dfrac{1}{2},\ c = -\dfrac{1}{4}$

(5) $V = \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{71}{12}e^{-4}\right)\pi$

【解答】

$$f(x) = xe^{-x}$$

(1) 導関数 $f'(x)$ は

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \boldsymbol{(1-x)e^{-x}} \end{aligned}$$

……(答)

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

$f(x)$ の増減表は**右表**となる．

(2) 第 2 次導関数 $f''(x)$ は

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-1) \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \boldsymbol{(x-2)e^{-x}} \end{aligned}$$

……(答)

$f''(x)$ は $x = 2$ で符号が変わるから，$x = 2$ において変曲点となる．$f(2) = 2e^{-2}$ であるから，C の変曲点の座標は

$$\boldsymbol{\left(2,\ 2e^{-2}\right)}$$

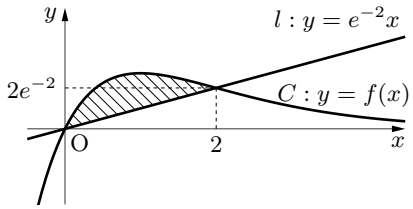
……(答)

である．

(3) l は変曲点 $(2,\ 2e^{-2})$ と原点 $(0,\ 0)$ とを通る直線であり，l の方程式は

$$y = e^{-2}x$$

である．C と l で囲まれた領域は右図の斜線部分であり，面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 xe^{-x}\,dx - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2e^{-2} \\ &= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^2 - 2e^{-2} \\ &= \boldsymbol{1 - 5e^{-2}} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(4) $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2ax + b)e^{-2x} + (ax^2 + bx + c)\cdot e^{-2x}\cdot(-2) \\ &= \{-2ax^2 + 2(a-b)x + b - 2c\}e^{-2x} \end{aligned}$$

であるから，$g'(x) = x^2e^{-2x}$ を満たす定数 $a,\ b,\ c$ は

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2(a-b) = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a = -\frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{4}}$$

……(答)

である．

(5) (3) の領域を x 軸のまわり 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi(xe^{-x})^2\,dx - \frac{1}{3}\cdot\pi(2e^{-2})^2\cdot 2 \\ &= \pi\int_0^2 x^2e^{-2x}\,dx - \frac{8\pi}{3}e^{-4} \end{aligned}$$

である．(4) より

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}\right\}' = x^2e^{-2x}$$

なので

$$\int x^2e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であるから

$$\begin{aligned} V &= \pi\Big[-\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}\Big]_0^2 - \frac{8\pi}{3}e^{-4} \\ &= \pi\left\{-\frac{13}{4}e^{-4} + \frac{1}{4}\right\} - \frac{8\pi}{3}e^{-4} \\ &= \boldsymbol{\left(\frac{1}{4} - \frac{71}{12}e^{-4}\right)\pi} \end{aligned}$$

……(答)

である．