座標空間において，$x^2+y^2 \leqq 3$, $0 \leqq z \leqq 3$ で表される円柱を C とする．以下の設問に答えよ．

(1) C のうち，$\sqrt{3}z \leqq y$ を満たす部分を D_1 とするとき，D_1 の体積を求めよ．
(2) C のうち，$z \leqq -\sqrt{3}y$ を満たす部分を D_2 とするとき，D_2 の体積を求めよ．
(3) C のうち，yz 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分を D とするとき，D の体積を求めよ．

(22 関西医大 5)

【答】

(1) 2
(2) 6
(3) 16

【解答】

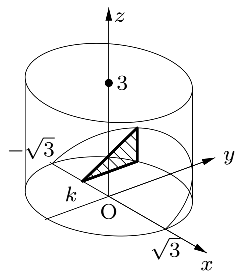
$$C : \begin{cases} x^2+y^2 \leqq 3 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \end{cases}$$

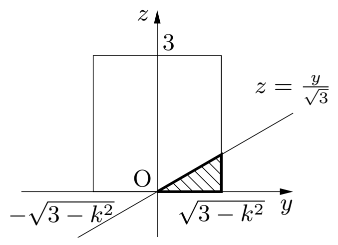
(1)
$$D_1 : \begin{cases} x^2+y^2 \leqq 3 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \\ \sqrt{3}z \leqq y \end{cases}$$

D_1 の平面 $x=k$ による切り口 $D_1(k)$ を考える．

$$D_1(k) : \begin{cases} y^2 \leqq 3-k^2 \\ 0 \leqq z \leqq 3 \\ z \leqq \dfrac{y}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

であり，切り口が存在するのは $-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3}$ のときであり，切り口 $D_1(k)$ は下の右図となる．





切り口 $D_1(k)$ の面積 $S_1(k)$ は

$$S_1(k) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3-k^2}\cdot\frac{\sqrt{3-k^2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3-k^2)$$

であるから，D_1 の体積 V_1 は

$$V_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}}(3-k^2)\,dk = 2\times\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[3k-\frac{k^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 切り方を変えてみる．
  D_1 を平面 $y=t$ で切ると

$$D_1(t):\begin{cases}x^2 \leqq 3-t^2\\ 0 \leqq z \leqq 3\\ \sqrt{3}z \leqq t\end{cases}$$

であり，切り口が存在するためには，第 1 の不等式より

$$3-t^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3}$$

が必要であり，このとき

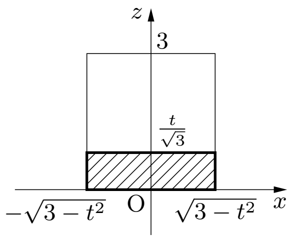
$$-1 \leqq \frac{t}{\sqrt{3}} \leqq 1$$

であるから，第 2，第 3 の不等式も考えると

$$\begin{cases}-\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3}\\ \dfrac{t}{\sqrt{3}} \geqq 0\end{cases} \qquad \therefore \quad 0 \leqq t \leqq \sqrt{3}$$

のとき存在する．このとき，不等式は

$$D_1(t):\begin{cases}x^2 \leqq 3-t^2\\ 0 \leqq z \leqq \dfrac{t}{\sqrt{3}}\end{cases}$$



となるから，切り口は右図の斜線部分となる．
面積 $S_1(t)$ は

$$S_1(t)=2\sqrt{3-t^2}\cdot\frac{t}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}t\sqrt{3-t^2}$$

であるから，D_1 の体積 V_1 は

$$\begin{aligned}V_1&=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}t\sqrt{3-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3-t^2}\,\frac{(3-t^2)'}{-2}\,dt\\ &=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2}{3}(3-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}3^{\frac{3}{2}}=2\end{aligned}$$

である．

- D_1 を平面 $z=u$ で切ると

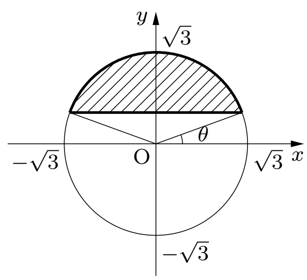
$$D_1(u):\begin{cases}x^2+y^2 \leqq 3\\ 0 \leqq u \leqq 3\\ \sqrt{3}u \leqq y\end{cases}$$

であり，切り口が存在する条件は

$$\begin{cases}0 \leqq u \leqq 3\\ \sqrt{3}u \leqq \sqrt{3}\end{cases} \qquad \therefore \quad 0 \leqq u \leqq 1$$

であり，このとき不等式は

$$D_1(u):\begin{cases}x^2+y^2 \leqq 3\\ \sqrt{3}u \leqq y\end{cases}$$



である．$u=\sin\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことができる．
このとき斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cos\theta\cdot\sqrt{3}\sin\theta\\ &=\frac{3}{2}(\pi-2\theta-\sin 2\theta)\end{aligned}$$

体積 V_1 は $du=\cos\theta\,d\theta$ に注意すると

$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}(\pi-2\theta-\sin 2\theta)\cos\theta\,d\theta$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\pi\cos\theta-2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\cos\theta\}\,d\theta$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos\theta\,d\theta=\Big[\pi\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\cos\theta\,d\theta=\Big[2\theta\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\,d\theta=\pi-\Big[-2\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\sin 3\theta+\sin\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 3\theta}{3}-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

求める体積 V_1 は

$$V_1=\frac{3}{2}\left\{\pi-(\pi-2)-\frac{2}{3}\right\}=2$$

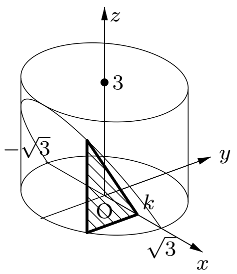
である．

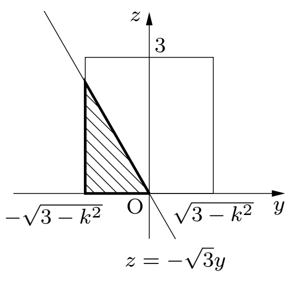
(2) $$D_2:\begin{cases}x^2+y^2\leqq 3\\ 0\leqq z\leqq 3\\ z\leqq -\sqrt{3}y\end{cases}$$

D_2 の平面 $x=k$ による切り口 $D_2(k)$ を考える．

$$D_2(k):\begin{cases}y^2\leqq 3-k^2\\ 0\leqq z\leqq 3\\ z\leqq -\sqrt{3}y\end{cases}$$

であり，切り口が存在するのは $-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$ のときであり，切り口は右図の斜線部分となる．





切り口 $D_2(k)$ の面積 $S_2(k)$ は

$$S_2(k)=\frac{1}{2}\sqrt{3-k^2}\cdot\sqrt{3}\sqrt{3-k^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-k^2)$$

であるから，D_2 の体積 V_2 は

$$V_2=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}(3-k^2)\,dk=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left[3k-\frac{k^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=\mathbf{6}$$ ……(答)

である．

(3) D の平面 $x=k$ による切り口 $D(k)$ を考える．

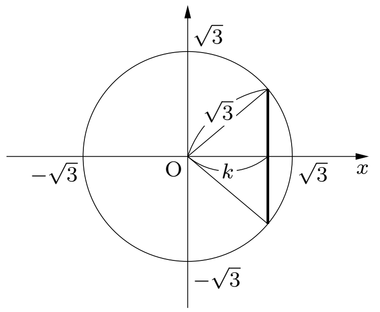
yz 平面上の直線 $l:y+\sqrt{3}z=0,\ x=0$ $(z=-\frac{1}{\sqrt{3}}y,\ x=0)$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分は直線 l を軸とする半径 $\sqrt{3}$ の円柱である．この円柱を C' とすると，D は C と C' の共通部分である．

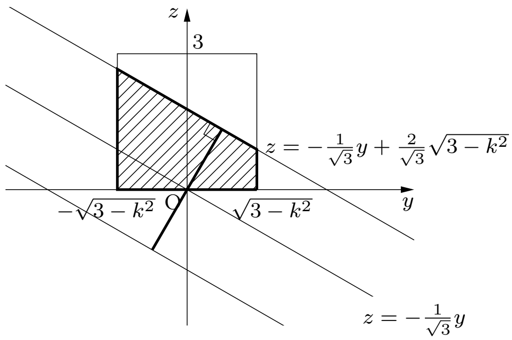
C' を平面 $x=k$ で切ると切り口は直線 $l' : y+\sqrt{3}z=0,\ x=k$ からの距離が $\sqrt{3-k^2}$ の 2 直線に挟まれた領域となる．

したがって，平面 $x=k(-\sqrt{3} \leqq k \leqq \sqrt{3})$ による切り口 $D(k)$ は

$$D(k): \begin{cases} -\sqrt{3-k^2} \leqq y \leqq \sqrt{3-k^2} \\ 0 \leqq z \leqq 3 \\ -\dfrac{y}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-k^2} \leqq z \leqq -\dfrac{y}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3-k^2} \end{cases}$$

であり，D の平面 $x=k$ による切り口は下の右図の斜線部分となる．





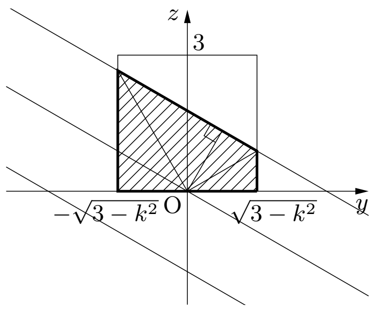
切り口の面積は

$$S(k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3-k^2}}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3-k^2}}{\sqrt{3}}\right)\cdot 2\sqrt{3-k^2} = \frac{4}{\sqrt{3}}(3-k^2)$$

であるから，D の体積 V は

$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4}{\sqrt{3}}(3-k^2)\,dk = 2\times\frac{4}{\sqrt{3}}\left[3k-\frac{k^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}\sqrt{3} = \mathbf{16} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



- 右図より，$D(k)$ の面積 $S(k)$ は

  $$S(k) = 2(S_1(k)+S_2(k))$$

  であり，求める体積 V は

  $$\begin{aligned} V &= 2(V_1+V_2) \\ &= 2(2+6) \\ &= 16 \end{aligned}$$

  である．