1個のさいころを2回続けて投げるとき，出た目を順に a, b で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{a+b}{a}$ が整数となる場合は何通りか求めよ．

(2) $\dfrac{ab}{a+b}$ が整数となる場合は何通りか求めよ．

(3) $\dfrac{ab}{a+b}$ が有限小数ではない循環小数となる場合は何通りか求めよ．

(22 東北学院大 工 A 5)

【答】

(1) 14 通り
(2) 5 通り
(3) 16 通り

【解答】

(1) a, b はともに 1 以上 6 以下の整数であるから，$\dfrac{a+b}{a}$ が整数となるのは b が a の倍数となるときである．
$a=1$ のとき，b は任意であり 6 通りある．
$a=2$ のとき，b は偶数であり 3 通りある．
$a=3$ のとき，b は 3 の倍数であり 2 通りある．
$a=4$, 5, 6 のとき，b はそれぞれ 1 通りある．
　以上より，$\dfrac{a+b}{a}$ が整数となる場合は

$$6+3+2+1+1+1=\mathbf{14}\ \textbf{通り} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\dfrac{ab}{a+b}=a-\dfrac{a^2}{a+b}$ であるから，$\dfrac{ab}{a+b}$ が整数となることと $\dfrac{a^2}{a+b}$ が整数となることは同値である．a が与えられたとき，$\dfrac{a^2}{a+b}$ が整数となるのは $a+b$ $(a+1 \leqq a+b \leqq a+6)$ が a^2 の約数となることである．
$a=1$ のとき；$1+b$ $(2 \leqq 1+b \leqq 7)$ が 1 の約数となる b は存在しない．
$a=2$ のとき；$2+b$ $(3 \leqq 2+b \leqq 8)$ が 4 の約数となるのは，$b=2$ の 1 通りである．
$a=3$ のとき；$3+b$ $(4 \leqq 3+b \leqq 9)$ が 9 の約数となるのは，$b=6$ の 1 通りである．
$a=4$ のとき；$4+b$ $(5 \leqq 4+b \leqq 10)$ が 16 の約数となるのは，$b=4$ の 1 通りである．
$a=5$ のとき；$5+b$ $(6 \leqq 5+b \leqq 11)$ が 25 の約数となる b は存在しない．
$a=6$ のとき；$6+b$ $(7 \leqq 6+b \leqq 12)$ が 36 の約数となるのは，$b=3$, 6 の 2 通りである．
　以上より，$\dfrac{ab}{a+b}$ が整数となる場合は

$$0+1+1+1+0+2=\mathbf{5}\ \textbf{通り} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $\dfrac{ab}{a+b}$ を既約分数の形で表すと下表となる．

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{4}=1$	$\frac{6}{5}$	$\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{18}{9}=2$
4	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{16}{8}=2$	$\frac{20}{9}$	$\frac{24}{10}=\frac{12}{5}$
5	$\frac{5}{6}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$	$\frac{30}{11}$
6	$\frac{6}{7}$	$\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$	$\frac{18}{9}=2$	$\frac{24}{10}=\frac{12}{5}$	$\frac{30}{11}$	$\frac{36}{12}=3$

$\dfrac{ab}{a+b}$ が有限小数となるのは，分母が 2, 5 だけのときであるから，循環小数となるのはそれ以外のときであり，表の赤文字 **16 通り** である． ……(答)

- (2) は (3) の表を利用してもよい．
  $\dfrac{ab}{a+b}$ が整数となるのは表の緑文字 5 通り である．
- 既約分数 $\dfrac{m}{n}$ が有限小数である条件は n の約数が 2，5 だけであることを示す．
  $\longrightarrow$ の証) $\dfrac{m}{n}$ が小数第 k 位まで続く有限小数ならば，
  $$\frac{m}{n}=\frac{(\text{整数})}{10^k} \qquad \therefore \quad 2^k5^k\frac{m}{n}=(\text{整数})$$
  である．m，n は既約だから，n の約数は 2，5 だけである．
  $\longleftarrow$ の証) n の約数は 2，5 だけならば，0 以上の整数 i，j ($i=j=0$ ではない) を用いて
  $$\frac{m}{n}=\frac{m}{2^i5^j}$$
  と表すことができる．
  $$i \leqq j \text{ のとき，} \frac{m}{n}=\frac{2^{j-i}m}{10^j} \qquad \frac{m}{n} \text{ は有限小数である．}$$
  $$i \geqq j \text{ のとき，} \frac{m}{n}=\frac{5^{i-j}m}{10^i} \qquad \frac{m}{n} \text{ は有限小数である．}$$
  であり，いずれのときも有限小数である．