3 つの袋 A, B, C それぞれに，1 から 30 までの番号を 1 つずつ書いた 30 枚のカードが入っている．A, B, C の袋からカードを 1 枚ずつ取り出す．全部で 30^3 通りのすべての取り出し方について考える．このとき，取り出した 3 枚のカードの番号を，$X,\ Y,\ Z\ \ (X \leqq Y \leqq Z)$ とする．たとえば，A, B, C の袋から，それぞれ 24，16，24 を取り出したとき，$X=16,\ Y=Z=24$ である．

(1) Y が 12 となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか．

(2) Y が 12 で，$X,\ Y,\ Z$ が等比数列となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか．

(3) $X,\ Y,\ Z$ が，公差が 0 ではない等差数列となるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち何通りあるか．

(22 群馬大 医・理工・情報 1)

【答】

(1) 1276 通り

(2) 19 通り

(3) 1260 通り

【解答】

(1) Y が 12 となるとき，$X \leqq 12$ かつ $12 \leqq Z$ であり

(i) $X=Y=Z=12$

(ii) 「$X=Y=12$ かつ $12<Z$」または「$X<12$ かつ $Y=Z=12$」

(iii) $X<12$ かつ $Y=12$ かつ $12<Z$

のいずれかである．

(i) は　1　通り

(ii) は $X,\ Y,\ Z$ がどの袋から取り出されるかも考えて

$$3\times(30-12)+3\times 11=3\times 29=87 \quad \text{通り}$$

(iii) は $X,\ Y,\ Z$ がどの袋から取り出されるかも考えて

$$3!\times 11\cdot 1\cdot(30-12)=6\times 11\cdot 18=1188 \quad \text{通り}$$

よって，求めるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち

$$1+87+1188=\mathbf{1276\ (通り)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

ある．

(2) $X,\ Y(=12),\ Z$ がこの順に等比数列となる条件は

$$XZ=Y^2 \qquad \therefore \quad XZ=12^2$$

であり，$1 \leqq X \leqq 12 \leqq Z \leqq 30$ より

$$(X,\ Y,\ Z)=(6,\ 12,\ 24),\ (8,\ 12,\ 18),\ (9,\ 12,\ 16),\ (12,\ 12,\ 12)$$

である．よって，求めるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち

$$3!\times 3+1=\mathbf{19\ (通り)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

ある．

(3) $X,\ Y,\ Z$ がこの順に等差数列になる条件は

$$X+Z=2Y \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，公差は 0 でないから

$$1 \leqq X < Y < Z \leqq 30$$

である．① より

$$(X,\ Z)=(\text{偶数},\ \text{偶数}) \text{ または } (\text{奇数},\ \text{奇数})$$

のいずれかであり，$(X,\ Z)$ に対し，Y は一意に決まる．

どの袋から取り出されるかも考えて，求めるカードの取り出し方は，30^3 通りのうち

$$\begin{aligned} 3! \times ({}_{15}\mathrm{C}_2 + {}_{15}\mathrm{C}_2) &= 6 \times \left(\frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} + \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} \right) \\ &= 6 \times 15 \cdot 14 \\ &= \mathbf{1260\ (通り)} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

ある．