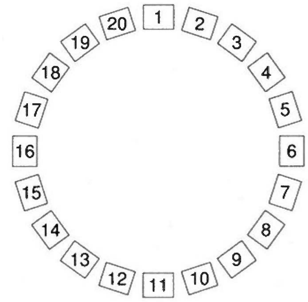
次の問いに答えよ．

(1) 1 から 9 までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9$ を満たすように 3 つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 3$ を満たすものは全部で何通りあるか．

(2) 1 から 50 までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50$ を満たすように 3 つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 10$ を満たすものは全部で何通りあるか．

(3) 1 番から 20 番までの番号が書かれた座席が，図のように円形に並んでいる．この中から，2 つ以上の間隔を空けて 3 つの座席を選ぶ (例えば，1 番を選んだときは 2 番，3 番，19 番，20 番は選べない)．このような 3 つの座席の選び方は全部で何通りあるか．



(22 琉球大 工・医・理・教育 4)

【答】

(1) 10 通り

(2) 4960 通り

(3) 520 通り

【解答】

(1) 与えられた条件は

$$\begin{cases} 1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9 \\ a_2 - a_1 \geqq 3 \\ a_3 - a_2 \geqq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9 \\ a_1 + 3 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \end{cases}$$

第 2 式より，$1 + 3 \leqq a_2 \leqq 9 - 3$，すなわち

$$4 \leqq a_2 \leqq 6$$

であり，a_2 をこの範囲で固定したとき

a_1 は，$1,\ \cdots,\ a_2 - 3$ の　$a_2 - 3$ 通り

a_3 は，$a_2 + 3,\ \cdots,\ 9$ の　$7 - a_2$ 通り

の選び方がある．よって，求める 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\begin{aligned} \sum_{a_2=4}^{6} (a_2 - 3)(7 - a_2) &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ &= 3 + 4 + 3 \\ &= \mathbf{10}\ \textbf{(通り)} \end{aligned}$$

……(答)

である．

- すべてを書き出すと

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 \\ 1 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 7,\ 8,\ 9 \\ & \searrow & 5 & \longrightarrow & 8,\ 9 \\ & \searrow & 6 & \longrightarrow & 9 \\ 2 & \longrightarrow & 5 & \longrightarrow & 8,\ 9 \\ & \searrow & 6 & \longrightarrow & 9 \\ 3 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 9 \end{array}$$

の 10 通りである．

- $n=10$ なら，すべてを書き出してもよいが，(2) のように $n=50$ となるとこのやり方はツライ．条件式を同値変形してみる．

$$\begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9\\ a_2-a_1 \geqq 3\\ a_3-a_2 \geqq 3\end{cases} \iff \begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9\\ a_1 \leqq a_2-3\\ a_2 \leqq a_3-3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9\\ a_1 \leqq a_2-3\\ a_2-3 \leqq a_3-6\end{cases}$$

であり

$$1 \leqq a_1 \leqq a_2-3 \leqq a_3-6 \leqq 3 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

である．組 $(a_1,\ a_2-3,\ a_3-6)$ に対し，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$${}_3\mathrm{H}_3 = {}_{3+3-1}\mathrm{C}_3 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10\ (\text{通り})$$

である．

- $㋐ \iff 1 \leqq a_1 < a_2-2 < a_3-4 \leqq 5$

であり，組 $(a_1,\ a_2-2,\ a_3-4)$ に対し，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$${}_5\mathrm{C}_3 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10\ (\text{通り})$$

である．

(2) 与えられた条件は

$$\begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50\\ a_2-a_1 \geqq 10\\ a_3-a_2 \geqq 10\end{cases} \iff \begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50\\ a_1+10 \leqq a_2 \leqq a_3-10\end{cases}$$

第 2 式より，$1+10 \leqq a_2 \leqq 50-10$，すなわち

$$11 \leqq a_2 \leqq 40$$

であり，a_2 をこの範囲で固定したとき

a_1 は，$1,\ \cdots,\ a_2-10$ の　a_2-10 通り
a_3 は，$a_2+10,\ \cdots,\ 50$ の　$41-a_2$ 通り

の選び方がある．よって，求める 3 つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\begin{aligned}&\sum_{a_2=11}^{40}(a_2-10)(41-a_2)\\ &= \sum_{k=1}^{30}k(31-k) \quad (\because\ k=a_2-10)\\ &= 31\cdot\frac{30\cdot 31}{2} - \frac{30\cdot 31\cdot 61}{6}\\ &= 31\cdot 15\cdot 31 - 5\cdot 31\cdot 61\\ &= 31\cdot 5\cdot(93-61)\\ &= \mathbf{4960\ (通り)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

- 条件式を同値変形すると

$$\begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50 \\ a_2 - a_1 \geqq 10 \\ a_3 - a_2 \geqq 10\end{cases} \iff \begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50 \\ a_1 \leqq a_2 - 10 \\ a_2 \leqq a_3 - 10\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50 \\ a_1 \leqq a_2 - 10 \\ a_2 - 10 \leqq a_3 - 20\end{cases}$$

であり

$$1 \leqq a_1 \leqq a_2 - 10 \leqq a_3 - 20 \leqq 30 \qquad \cdots\cdots \text{㋑}$$

である．組 $(a_1,\ a_2-10,\ a_3-20)$ に対し，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$${}_{30}\mathrm{H}_3 = {}_{30+3-1}\mathrm{C}_3 = \frac{32\cdot31\cdot30}{3\cdot2\cdot1} = 4960\ (\text{通り})$$

である．

- ㋑ $\iff 1 \leqq a_1 < a_2 - 9 < a_3 - 18 \leqq 32$

であり，組 $(a_1,\ a_2-9,\ a_3-18)$ に対し，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$${}_{32}\mathrm{C}_3 = \frac{32\cdot31\cdot30}{3\cdot2\cdot1} = 4960\ (\text{通り})$$

である．

(3) 選ぶ座席番号を $a_1 < a_2 < a_3$ とする．

(i) $a=1$ のとき，a_2，a_3 は 2 つ以上の間隔を空けるから

$$\begin{cases}4 \leqq a_2 < a_3 \leqq 18 \\ a_3 - a_2 \geqq 3\end{cases}$$

である．a_2 を $4 \leqq a_2 \leqq 15$ の範囲で固定するとき，a_3 は $18-(a_2+2) = 16-a_2$ 通りの選び方があるから，$(a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\sum_{a_2=4}^{15}(16-a_2) = 12+11+\cdots+1 = \frac{12\cdot13}{2} = 78\ (\text{通り})$$

である．

(ii) $a_1 = 2$ のとき

$$\begin{cases}5 \leqq a_2 < a_3 \leqq 19 \\ a_3 - a_2 \geqq 3\end{cases}$$

a_2 を $5 \leqq a_2 \leqq 16$ の範囲で固定するとき，a_3 は $19-(a_2+2) = 17-a_2$ 通りの選び方があるから，$(a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\sum_{a_2=5}^{16}(17-a_2) = 12+11+\cdots+1 = \frac{12\cdot13}{2} = 78\ (\text{通り})$$

である．

(iii) $a_1 = 3$ のとき

$$\begin{cases}6 \leqq a_2 < a_3 \leqq 20 \\ a_3 - a_2 \geqq 3\end{cases}$$

a_2 を $6 \leqq a_2 \leqq 17$ の範囲で固定するとき，a_3 は $20-(a_2+2) = 18-a_2$ 通りの選び方があるから，$(a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\sum_{a_2=6}^{17}(18-a_2) = 12+11+\cdots+1 = \frac{12\cdot13}{2} = 78\ (\text{通り})$$

である.

(iv) $a_1 \geqq 4$ とき

$$\begin{cases} 4 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 20 \\ a_2 - a_1 \geqq 3 \\ a_3 - a_2 \geqq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 20 \\ a_1 + 3 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \end{cases}$$

a_2 を $7 \leqq a_2 \leqq 17$ の範囲で固定するとき，a_1 は 4, $\cdots$, $a_2 - 3$ の $a_2 - 6$ 通り，a_3 は $20 - (a_2 + 2) = 18 - a_2$ 通りの選び方があるから，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方は

$$\begin{aligned} \sum_{a_2=7}^{17} (a_2 - 6)(18 - a_2) &= \sum_{k=1}^{11} k(12 - k) \quad (\because\ k = a_2 - 6) \\ &= 12 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} - \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} \\ &= 11 \cdot 2(36 - 23) = 286\ (\text{通り}) \end{aligned}$$

である.

よって，3 つの座席の選び方は

$$78 + 78 + 78 + 286 = \mathbf{520\ (通り)}$$ ……(答)

である.

- 条件を同値変形する.

$$(\text{i}) \begin{cases} a_1 = 1 \\ 4 \leqq a_2 < a_3 \leqq 18 \\ a_3 - a_2 \geqq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1 \\ 4 \leqq a_2 < a_3 \leqq 18 \\ a_2 \leqq a_3 - 3 \end{cases}$$

であり

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 4 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \leqq 15 \end{cases}$$

組 $(a_2,\ a_3 - 3)$ に対し，組 $(a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから

$$ {}_{15-3}\mathrm{H}_2 = {}_{12+2-1}\mathrm{C}_2 = \frac{13 \cdot 12}{2} = 78\ (\text{通り})$$

同じく

$$(\text{ii}) \begin{cases} a_1 = 2 \\ 5 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \leqq 16 \end{cases} \qquad \therefore \quad {}_{16-4}\mathrm{H}_2 = {}_{12+2-1}\mathrm{C}_2 = 78\ (\text{通り})$$

$$(\text{iii}) \begin{cases} a_1 = 3 \\ 6 \leqq a_2 \leqq a_3 - 3 \leqq 17 \end{cases} \qquad \therefore \quad {}_{17-5}\mathrm{H}_2 = {}_{12+2-1}\mathrm{C}_2 = 78\ (\text{通り})$$

また

$$(\text{iv}) \begin{cases} 4 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 20 \\ a_2 - a_1 \geqq 3 \\ a_3 - a_2 \geqq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 20 \\ a_1 \leqq a_2 - 3 \\ a_2 \leqq a_3 - 3 \end{cases}$$

は

$$4 \leqq a_1 \leqq a_2 - 3 \leqq a_3 - 6 \leqq 14$$

であり，組 $(a_1,\ a_2 - 3,\ a_3 - 6)$ に対し，組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は一意に決まるから

$$ {}_{14-3}\mathrm{H}_3 = {}_{11}\mathrm{H}_3 = {}_{11+3-1}\mathrm{C}_3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286\ (\text{通り})$$

以上より，全部で

$$78 + 78 + 78 + 286 = 520\ \text{通り}$$

である.