10 から 49 までの整数が書かれた 40 枚の番号札が入った箱がある．この箱から複数の番号札を同時に引くとき，このうちの 2 枚の番号札について，十の位どうしまたは一の位どうしが一致するとき，条件 (A) を満たすということにする．例えば，12, 32, 35 の 3 枚を引いたときには，条件 (A) を満たす 2 枚の番号札の組合せは (12, 32) と (32, 35) の 2 組含まれる．このとき次の問いに答えよ．

(1) 箱から 2 枚の番号札を同時に引くとき，その組合せが条件 (A) を満たす確率を求めよ．

(2) 箱から 4 枚の番号札を同時に引くとき，それらの中に条件 (A) を満たす 2 枚の番号札の組合せが少なくとも 1 組含まれる確率を求めよ．

(3) 箱から 3 枚の番号札を同時に引くとき，それらの中に条件 (A) を満たす 2 枚の番号札の組合せがちょうど k 組含まれる確率を $k=1,\ 2,\ 3$ の各々について求めよ．

(22 東京海洋大 生命・資源 4)

【答】

(1) $\dfrac{4}{13}$

(2) $\dfrac{8635}{9139}$

(3) $k=1$ のとき $\dfrac{135}{247}$，$k=2$ のとき $\dfrac{27}{247}$，$k=3$ のとき $\dfrac{1}{19}$

【解答】

(1) 40 枚の番号札が入った箱から 2 枚の番号札を引く方法は

$$ {}_{40}\mathrm{C}_2 = \frac{40\cdot 39}{2\cdot 1} = 20\cdot 39 \text{ 通り} $$

あり，これらは同様に確からしい．

このうち，条件 (A) を満たすものは

一の位が一致する場合　${}_{10}\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2 = 10\cdot\dfrac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 60$ 通り

十の位が一致する場合　${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2 = 4\cdot\dfrac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 180$ 通り

の 2 つの場合があり，これらは排反であるから，求める確率は

$$ \frac{60+180}{20\cdot 39} = \boldsymbol{\frac{4}{13}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．

(2) 40 枚の番号札が入った箱から 4 枚の番号札を引く方法は

$$ {}_{40}\mathrm{C}_4 = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 13\cdot 38\cdot 37 \text{ 通り} $$

あり，これらは同様に確からしい．

このうち，条件 (A) を満たす 2 枚の番号札の組合せが少なくとも 1 組含まれる事象の余事象となるものは，十の位，一の位がすべて異なるものであり

$$ {}_4\mathrm{C}_4\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 \text{ 通り} $$

あるから，求める確率は

$$ 1-\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 13\cdot 38\cdot 37} = 1-\frac{9\cdot 8\cdot 7}{13\cdot 19\cdot 37} = 1-\frac{504}{9139} = \boldsymbol{\frac{8635}{9139}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．

(3) 40 枚の番号札が入った箱から 3 枚の番号札を引く方法は

$$ {}_{40}\mathrm{C}_3 = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \cdot 13 \cdot 38 \text{ 通り} $$

あり，これらは同様に確からしい．

(i) $k = 1$ のとき

(ア) 条件 (A) を満たす 2 枚の番号札が一の位で一致するとき

一致する一の位の選び方は 10 通りであり，一致する 2 枚の十の位の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り，その各々に対して，残り 1 枚の選び方は $40 - 22 = 18$ 通りあるから

$$ 10 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot 18 = 10 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot 18 = 1080 \text{ 通り} $$

(イ) 条件 (A) を満たす 2 枚の番号札が十の位で一致するとき

一致する十の位の選び方は 4 通りであり，一致する 2 枚の一の位の選び方は ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通り，その各々に対して，残り 1 枚の選び方は $40 - 16 = 24$ 通りあるから

$$ 4 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot 24 = 4 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot 24 = 4320 \text{ 通り} $$

(ア)，(イ) は排反であるから，求める確率は

$$ \frac{1080 + 4320}{20 \cdot 13 \cdot 38} = \frac{5400}{20 \cdot 13 \cdot 38} = \boldsymbol{\frac{135}{247}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．

(ii) $k = 2$ のとき

条件 (A) を満たす 2 組の番号札に共通する番号札の選び方は 40 通りあり，他の 2 枚はその番号と一の位が一致するものと，十の位が一致するするものであるから

$$ 40 \cdot 3 \cdot 9 \text{ 通り} $$

あるから，求める確率は

$$ \frac{40 \cdot 3 \cdot 9}{20 \cdot 13 \cdot 38} = \boldsymbol{\frac{27}{247}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．

(iii) $k = 3$ のとき

条件 (A) を満たすものが 3 組となるのは

3 枚の一の位が一致する場合　${}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_3 = 10 \cdot 4 = 40$ 通り

3 枚の十の位が一致する場合　${}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_3 = 4 \cdot \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 480$ 通り

の 2 つの場合があり，これらは排反であるから，求める確率は

$$ \frac{40 + 480}{20 \cdot 13 \cdot 38} = \boldsymbol{\frac{1}{19}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．