袋の中に赤玉 2 個と白玉 2 個の合計 4 個の玉が入っている．A と B の 2 人で次のルールに従ってゲームをする．

- A，B の順で繰り返しプレイヤーになる．
- プレイヤーは袋から玉を同時に 2 個取り出す．取り出した玉の色が同じならば，プレイヤーの勝利とする．取り出した玉の色が異なるならば，それらを袋に戻してよくかき混ぜ，プレイヤーを交替する．
- A が勝利するか，A が勝利せずに A の後に B がプレイヤーになり，B が勝利するか，B が勝利せずにプレイヤーを交替することによって 1 巡が終了する．
- 勝者が決まるとゲームは終了する．

以下の問いに答えよ．

(1) B が 1 巡目で勝者になる確率を求めよ．
(2) $N$ を自然数とし，$N$ 巡目以内に B が勝者になる確率を $p_N$ とする．$p_N > 0.396$ となる $N$ の最小値を求めよ．ただし，$\log_2 3 = 1.585$, $\log_2 5 = 2.322$ とする．
(3) $N$ を自然数とする．$N$ 巡目以内に勝者になる確率は，A と B のどちらが大きいか．

(22 熊本大 教育・理・工・医・薬 2)

---

【答】

(1) $\dfrac{2}{9}$
(2) 6
(3) A がの方が大きい

---

【解答】

(1) B が 1 巡目で勝者になるのは

A が異なる色の玉 2 個を取り出し，B が同じ色の玉 2 個を取り出す

場合である．

まず，袋の中にある 4 個の玉から 2 個取り出す場合の数は

$${}_4\mathrm{C}_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \text{ (通り)}$$

であり，これらは同様に確からしい．このうち，異なる色の玉 2 個を取り出す場合の数は

$${}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ (通り)}$$

であり，同じ色の玉 2 個を取り出す場合の数は

$${}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (通り)}$$

である．

よって，B が 1 巡目で勝者になる確率は

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{2}{9}} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．

(2) 1 巡して勝者が決まらないのは，A，B がともに異なる色の玉 2 個を取り出す場合であり，その確率は

$$\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

である．(1) の結果もあわせると，$N$ 巡目で B が勝者となる確率は $\left(\frac{4}{9}\right)^{N-1}\times\frac{2}{9}$ である．

よって，$N$ 巡目以内に B が勝者となる確率 $p_N$ は

$$\begin{aligned} p_N &= \frac{2}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{2}{9}+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{N-1}\times\frac{2}{9} \\ &= \frac{2}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^N}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^N\right\} \end{aligned}$$

である．したがって，$p_N>0.396$ となる $N$ は次の条件を満たす．

$$\begin{aligned} &\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^N\right\}>0.396 \\ \Longleftrightarrow\ &\left(\frac{4}{9}\right)^N<1-\frac{5}{2}\times 0.396 \\ \Longleftrightarrow\ &\log_2\left(\frac{4}{9}\right)^N<\log_2 0.01 \\ \Longleftrightarrow\ &N(\log_2 4-\log_2 9)<\log_2 0.01 \\ \Longleftrightarrow\ &N>\frac{\log_2 0.01}{\log_2 4-\log_2 9}\quad(\because\ \log_2 4-\log_2 9<0) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 0.01}{\log_2 4-\log_2 9}&=\frac{\log_2 10^{-2}}{\log_2 2^2-\log_2 3^2}=\frac{-(1+\log_2 5)}{1-\log_2 3} \\ &=-\frac{1+2.322}{1-1.585}=\frac{3.322}{0.585}=5.6\cdots \end{aligned}$$

であり，$N$ の最小値は

$$\boldsymbol{N=6}$$ ……(答)

である．

(3) 1 巡の中で A が勝者となる確率は，(1) の議論により

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

であるから，$N$ 巡目以内に A が勝者となる確率は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{N-1}\times\frac{1}{3} \\ &=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{4}{9}+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{N-1}\right\} \\ &>\frac{2}{9}\left\{1+\frac{4}{9}+\cdots+\left(\frac{4}{9}\right)^{N-1}\right\} \\ &=p_N \end{aligned}$$

よって，$N$ 巡目以内に勝者となる確率は **A** がの方が大きい． ……(答)