A，B の二人がそれぞれ 1 個のさいころを 3 回投げ，3 つの出た目を使って 3 桁の自然数をつくる．A は 1 回目に出た目を百の位，2 回目に出た目を十の位，3 回目に出た目を一の位の数として 3 桁の自然数をつくる．B は出た 3 つの目を百の位，十の位，一の位のいずれかとする 3 桁の自然数のうち最大となる数をつくる．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) A のつくることのできる 3 桁の自然数は何個あるか答えなさい．
(2) B のつくることのできる 3 桁の自然数は何個あるか答えなさい．
(3) B の 1 回目に出た目が 2 であったとき，B のつくる 3 桁の自然数が 226 より小さくなる確率を求めなさい．
(4) A の 1 回目と 2 回目に出た目がそれぞれ 5 と 4 であり，B の 1 回目に出た目が 4 であったとき，B のつくる 3 桁の自然数が A のつくる 3 桁の自然数より大きくなる確率を求めなさい．

(22 福島大 理工・食農 3)

【答】

(1) 216 個
(2) 56 個
(3) $\dfrac{1}{9}$
(4) $\dfrac{7}{18}$

【解答】

(1) 各桁の数はそれぞれ 6 通りがあるから，3 桁の自然数は

$$6^3 = \mathbf{216} \text{ 個} \qquad \cdots\cdots(答)$$

ある．

(2) 1 から 6 の異なる 6 種類の数字から重複を許して 3 個を選び，大きい方から順に並べると B のつくる 3 桁の自然数となる．3 個の自然数は

$$_6\mathrm{H}_3 = {}_{6+3-1}\mathrm{C}_3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{56} \text{ 個} \qquad \cdots\cdots(答)$$

ある．

- 異なる 6 種類のものの中から重複を許して 3 個を選ぶ選び方は，球○ 3 個と仕切り線 | 5 本の並べ方に対応する．たとえば,「｜｜○○｜｜｜○」は「3，3，6」を選んだことに対応する．よって，求める個数は

$$\frac{8!}{3!5!} = 56 \text{ 個}$$

- B のつくる 3 桁の自然数を出た目の種類で分類しながら数える．
  (i) 3 つとも異なる目の場合
  6 種類の目から 3 種類を選ぶので，$_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$ 個
  (ii) 2 つだけが同じ目の場合
  6 種類の目から 2 回出す目と 1 回出す目を選ぶので，$6\cdot 5 = 30$ 個
  (iii) すべて同じ目の場合
  6 種類の目から 1 種類を選ぶので，6 個

以上より，求める個数は

$$20+30+6=56 \text{ 個}$$

(3) B の 1 回目に出た目が 2 であったとき，B のつくる 3 桁の自然数が 226 より小さくなるのは，2，3 回目に出る目が 2 以下のときであるから，求める確率は

$$\left(\frac{2}{6}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{9}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) A，B のつくる自然数をそれぞれ a, b とする．条件より

$$541 \leqq a \leqq 546, \quad b \geqq 400$$

である．$b>a$ をみたす A の 3 回目，B の 2，3 回目の目の出方の数を求める．

B の 2，3 回目の目のうち少なくとも 1 つが 6 であるならば，$b \geqq 600$ となるので，A の 3 回目の目にかかわらず $b>a$ である．このとき，A，B の目の出方は

$$6 \cdot 11=66 \text{ 通り}$$

ある．

B の 2，3 回目の目が両方ともに 4 以下であるならば，$b \leqq 444$ となるので，$b<a$ である．

B の 2，3 回目の目の最大値が 5 である場合を，2 つの目の内訳により分けて考える．

(i) 2 つとも 5 の場合

$b=554$ で A の 3 回目の目にかかわらず $b>a$ となるので，6 通り．

(ii) 5 と 4 の場合

$b=544$ であり，A の 3 回目の目が 1, 2, 3 の場合 $b>a$ であり，4, 5, 6 の場合 $b \leqq a$ となるので，$2 \cdot 3=6$ 通り．

(iii) 5 と 3 の場合

$b=543$ であり，A の 3 回目の目が 1, 2 の場合 $b>a$ であり，3, 4, 5, 6 の場合 $b \leqq a$ となるので，$2 \cdot 2=4$ 通り．

(iv) 5 と 2 の場合

$b=542$ であり，A の 3 回目の目が 1 の場合 $b>a$ であり，2, 3, 4, 5, 6 の場合 $b \leqq a$ となるので，2 通り．

(v) 5 と 1 の場合

$b=541$ であり，A の 3 回目の目にかかわらず $b \leqq a$ となる．

以上より，求める確率は

$$\frac{66+6+6+4+2}{6^3}=\frac{84}{6^3}=\boldsymbol{\frac{7}{18}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．